МАКСИМАЛЬНОЕ НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО НАИБОЛЬШЕЙ МОЩНОСТИ

Дудов Мурат Хусеевич

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, г.Черкесск

dudovm@mail.ru

В статье предлагается метод построения максимального независимого множества наибольшей мощности, вычислительная сложность которого не превышает $O(n^9)$.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую задачу [1, ТГ1]:

Заданы граф $G=(V,E)$, $|V|=n$ и целое положительное число $K\le|V|$. Существует ли на G независимое множество вершин мощностью не менее K или, иначе говоря, существует ли подмножество $V'\subseteq V$, такое, что $|V'|\ge K$ и никакие две вершины из V' не соединены ребром из E?

Пусть $x_i=1$, если вершина $v_i\in V'$, и $x_i=0$, если $v_i\notin V'$. Сопоставим каждому ребру графа номер $s=\overline{(n+1),(n+m)}$.

Тогда, следуя методологии [2], рассматриваемую задачу можно представить в виде целочисленной задачи линейного программирования (1):

$$F=\sum_{i=1}^{n}x_i\to\max \tag{1.1}$$

$$x_i+x_j+x_s=1 \tag{1.2}$$

$$i,j=\overline{1,n},\ i\ne j \tag{1.3}$$

$$s=\overline{(n+1),(n+m)} \tag{1.4}$$

$$x_i,x_s\ge 0 \tag{1.5}$$

$$x_i\in\{0;1\}, \tag{1.6}$$

где F - целевая функция, равная количеству вершин максимального независимого множества наибольшей мощности; x_i, $i=\overline{1,n}$, - переменные, соответствующие вершинам исходного графа G; x_s, $s=\overline{(n+1),(n+m)}$, - переменные, соответствующие рёбрам графа G.

Известно, что в общем случае полиномиального по вычислительной сложности алгоритма решения целочисленной задачи линейного программирования не существует.

Представим задачу в виде обычной задачи линейного программирования, исключив условие целочисленности (2):

$$F=\sum_{i=1}^{n}x_i\to\max \tag{2.1}$$

$$x_i+x_j+x_s=1 \tag{2.2}$$

$$i,j=\overline{1,n},\ i\ne j \tag{2.3}$$

$$s=\overline{(n+1),(n+m)} \tag{2.4}$$

$$x_i,x_s\ge 0 \tag{2.5}$$

Одним из известных способов решения задачи (1) является применение симплекс-метода к задаче (2) и если полученное оптимальное решение целочисленно, то оно является решением и задачи (1). Но, как и во многих других графовых задачах [2], представленных в виде ЗЛП, наличие на исходном графе циклов нечётной длины обуславливает, в общем случае, нецелочисленность оптимального решения. В таком случае по последней симплекс-таблице формируют дополнительное ограничение так, чтобы полученное нецелочисленное решение стало недопустимым при сохранении допустимости всех возможных целочисленных решений. Такого рода дополнительные ограничения называются правильными отсечениями, например, отсечение Гомори.

2. Отсечения Гомори для задачи (1).

Пусть на графе G существует цикл C длины k, причем k – нечетное. Тогда в максимальное независимое множество наибольшей мощности V' могут войти не более $\lfloor k/2 \rfloor$ вершин цикла C, поскольку никакие две вершины из V' не соединены ребром по определению.

Между тем, применение симплекс-метода к (2) может дать оптимальное решение, компоненты которого, соответствующие циклу C, нецелочисленные, поскольку вклад переменных $x_1, x_2, .. x_k$ в целевую функцию задачи (2) равен $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le k/2$, если переменные нецелочисленные, и $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le \lfloor k/2 \rfloor$, если переменные целочисленные. При нечётных k справедливо $\lfloor k/2 \rfloor < k/2$, и при отсутствии каких-либо дополнительных ограничений на эти переменные симплекс-метод может найти именно это оптимальное нецелочисленное решение. Например, если в результате иттераций в базис введены переменные, соответствующие вершинам цикла C, и выведены переменные, соответствующие рёбрам этого же цикла.

Поэтому с целью исключения нецелочисленного решения можно заранее выделить все циклы нечётной длины и для каждого явно указать, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le \lfloor k/2 \rfloor, \qquad (3)$$

дополнив (2) соответствующими ограничениями (3).

Покажем, что неравенства типа (3) являются для данной задачи отсечениями Гомори.

Ограничения задачи (2), соответствующие циклу C (рис. 1), имеют следующий вид:

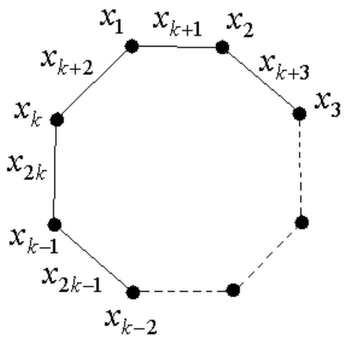

Рис.1. Цикл длины k,

x_i, $i = \overline{1,k}$, - переменные, соответствующие вершинам C;

x_s, $s = \overline{(k+1),(k+2k)}$, - переменные, соответствующие рёбрам C.

$$x_1 + x_2 + x_{k+1} = 1$$

$$x_1 + x_k + x_{k+2} = 1$$

$$x_2 + x_3 + x_{k+3} = 1$$

$$x_{k-2}+x_{k-1}+x_{2k-1}=1$$
$$x_{k-1}+x_k+x_{2k}=1.$$

Отсечение Гомори формируется по одной из нецелочисленных строк оптимальной симплекс-таблицы, пусть это строка, соответствующая переменной x_{k-1}.

Базисными переменными оптимальной симплекс-таблицы являются $x_1,\dots,x_k$, выразим x_{k-1} через свободные переменные, подставив в последнее уравнение вместо базисных переменных их выражения через свободные:

$$x_{k-1}=1-x_k-x_{2k}=1-(1-x_1-x_{k+2})-x_{2k}=x_1+x_{k+2}-x_{2k}=$$
$$=(1-x_2-x_{k+1})+x_{k+2}-x_{2k}=1-(1-x_3-x_{k+3})-x_{k+1}+x_{k+2}-x_{2k}=$$
$$=(1-x_{k-1}-x_{2k-1})-x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}+\ldots\pm x_{k+i}+\ldots-x_{2k},$$
$$2x_{k-1}=1-x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}+\ldots\pm x_{k+i}+\ldots-x_{2k-1}-x_{2k},$$
$$x_{k-1}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x_{k+1}+\tfrac{1}{2}x_{k+2}+\tfrac{1}{2}x_{k+3}+\ldots\pm\tfrac{1}{2}x_{k+i}+\ldots-\tfrac{1}{2}x_{2k-1}-\tfrac{1}{2}x_{2k}.$$

Сформируем отсечение Гомори:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\right\}-\left\{-\tfrac{1}{2}\right\}x_{k+1}-\left\{\tfrac{1}{2}\right\}x_{k+2}-\left\{\tfrac{1}{2}\right\}x_{k+3}-\ldots-\left\{\tfrac{1}{2}\right\}x_{k+i}-\ldots-\left\{-\tfrac{1}{2}\right\}x_{2k-1}-\left\{-\tfrac{1}{2}\right\}x_{2k}\le 0,$$

где $\{a\}=a-\lfloor a\rfloor$ - дробная часть a,

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x_{k+1}-\tfrac{1}{2}x_{k+2}-\tfrac{1}{2}x_{k+3}-\ldots-\tfrac{1}{2}x_{k+i}-\ldots-\tfrac{1}{2}x_{2k-1}-\tfrac{1}{2}x_{2k}\le 0,$$

с учётом исходной системы ограничений имеем

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(1-x_1-x_2)-\tfrac{1}{2}(1-x_1-x_k)-\tfrac{1}{2}(1-x_2-x_3)-\ldots-\tfrac{1}{2}(1-x_{k-1}-x_k)\le 0,$$
$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{k}{2}+x_1+x_2+\ldots+x_k\le 0,$$

в итоге

$$x_1+x_2+\ldots+x_k\le\tfrac{k}{2}-\tfrac{1}{2},$$

А так как k - нечётное, то

$$x_1+x_2+\ldots+x_k\le\lfloor k/2\rfloor,$$

что полностью соответствует (3).

3. Структура циклов нечётной длины.

Рассмотрим подробнее структуру циклов нечётной длины графа G. Пусть C - цикл на графе G, $v_1,v_2,\dots,v_k$ - вершины цикла C. Обозначим через $C(v)$ множество вершин цикла, смежных к вершине v.

Цикл будем называть элементарным или бесхордовым, если

$$\forall i=\overline{1,k}\quad |C(v_i)|=2, \tag{4}$$

т.е. каждая вершина цикла C смежна только двум другим вершинам этого же цикла. Все иные циклы будем называть составными, в том смысле, что любая хорда такого цикла C делит его на два меньших - C_1 и C_2, иначе говоря, любой составной цикл C состоит из двух или более элементарных.

Пусть C - цикл нечётной длины k. Будем проверять поочерёдно для каждой его вершины условие (4), и либо обнаружим хорду, либо убедимся, что цикл элементарный. Пусть (v_i,v_j) - первая найденная хорда цикла, тогда между вершинами v_i и v_j существуют две цепи, состоящие только из рёбер цикла. Поскольку C - цикл нечётной длины, то одна из цепей будет иметь чётную длину, а значит, вместе с хордой образует цикл C_1 нечётной длины. Вторая из цепей будет иметь нечётную длину, а значит, вместе с хордой образует цикл чётной длины. Проверяя далее условие (4) для непроверенных еще вершин цикла C_1, либо убедимся, что цикл элементарный, либо выделим еще один, меньший, чем C_1, но также цикл нечётной длины. В результате работы изложенного алгоритма не более, чем за $O(k)$ шагов будет либо выделен из исходного составного цикла C элементарный цикл нечётной длины, либо убедимся, что C - элементарный.

Пусть теперь C_1 - выделенный из C элементарный цикл нечётной длины t, $t < k$, $v_1, v_2, \ldots, v_t$ - вершины цикла C_1. Тогда отсечение, построеное по C, приобретает следующий вид:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_t + x_{t+1} + \ldots + x_k \le \lfloor (t + (k - t))/2 \rfloor,$$

но, поскольку и k, и t - нечётные, то $(k - t)/2$ - целое и для отсечения нецелочисленных решений достаточно ограничения, построенного по элементарному циклу C_1:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_t \le \lfloor t/2 \rfloor. \quad (5)$$

Максимально возможное количество бесхордовых циклов нечётной длины не более, чем количество треугольников (циклов длины «3») на полном графе, т.е. $O(n^3)$.

4. Метод решения задачи (1).

Будем теперь решать задачу (1) следующим методом. Применим симплекс-метод к задаче (2) и если полученное оптимальное решение целочисленно, то оно является решением и задачи (1). Если решение нецелочисленное, то симплекс-метод обнаружил на исходном графе цикл нечётной длины. Тогда для построения отсечения (5) найдём на соответствующих вершинах некоторый цикл нечётной длины и если он неэлементарный, то выделим из него элементарный цикл, применив приведённый выше алгоритм с проверкой условия (4). Добавив отсечение (5) к исходной системе ограничений задачи (2), снова применим симплекс-метод.

5. Вычислительная сложность метода.

Вычислительная сложность обычного применения симплекс-метода с отсечениями Гомори для задачи (1) определяется вычислительной сложностью собственно симплекс-метода на задачах типа (2) и возможным количеством отсечений, равном количеству циклов нечётной длины на исходном графе. В худшем случае количество всех циклов нечётной длины, различающихся хотя бы одной вершиной, экспоненциально относительно количества вершин графа.

Известно, что для общей задачи линейного программирования вычислительная сложность симплекс-метода неполиномиальна по двум причинам.

Во-первых, существует возможность «зацикливания» алгоритма, т.е. многократно повторяемый ввод и вывод из базиса одних и тех же переменных, причём без изменения целевой функции. Во-вторых, коэффициенты при переменных в исходной системе ограничений могут быть таковы, что до получения оптимального решения придётся перебрать все возможные допустимые решения, причём приращения целевой функции на каждой такой иттерации положительны.

Применение стандартных приемов [2,3] позволяет избежать зацикливания алгоритма симплекс-метода, поэтому принципиальное значение имеет вторая причина неполиномиальности симплекс-метода для общей задачи линейного программирования.

Особенностью задачи (2) является то, что максимально возможное значение целевой функции известно заранее и равно n, поскольку мощность любого независимого множества вершин на графе не больше количества вершин этого графа.

С другой стороны, можно показать, что ненулевые приращения целевой функции в ходе иттераций с использованием правил выбора переменных, вводимых и выводимых из базиса, по [3], не менее чем «$\frac{1}{2}$».Известно [2,3], что если алгоритм Блэнда обнаруживает цикл, то при выходе из цикла целевая функция получает положительное приращение.

Пусть C - цикл нечётной длины на графе G, и все переменные, соответствующие вершинам цикла, кроме одной, например, x_{k-1}, базисные.

Выше в общем виде (при построении отсечения Гомори) было получено уравнение для x_{k-1}, соответствующее иттерации, на которой x_{k-1} вводится в базис:

$$x_{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_{k+2} + \frac{1}{2}x_{k+3} + \ldots \pm \frac{1}{2}x_{k+i} + \ldots - \frac{1}{2}x_{2k-1} - \frac{1}{2}x_{2k}.$$

Ограничения задачи (2), соответствующие циклу C, имеют следующий вид:

$$x_1 + x_2 + x_{k+1} = 1$$
$$x_1 + x_k + x_{k+2} = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_{k+3} = 1$$

$$x_{k-2} + x_{k-1} + x_{2k-1} = 1$$
$$x_{k-1} + x_k + x_{2k} = 1.$$

Если теперь выразить все базисные переменные через свободные с учётом того, что $x_{k-1} = \frac{1}{2}$, то все переменные, соответствующие вершинам рассматриваемого цикла нечётной длины, тоже получат значение «$\frac{1}{2}$».

Нулевые приращения целевой функции при использовании алгоритма Блэнда возможны лишь при проведении иттераций с переменными внутри некоторого цикла, либо вне циклов. Поэтому количество таких иттераций не больше количества рёбер цикла, либо рёбер некоторого дерева, т.е. каждое ненулевое приращение будет полученно после не более чем $(n-1)$ иттераций с нулевым приращением целевой функции.

Таким образом, особенности задачи (2), отличающие её от общей задачи линейного программирования, позволяют оценить вычислительную сложность прменения симплекс-метода (в частности, алгоритма Блэнда) величиной $O(n^6)$.

Максимально возможное количество отсечений типа (5) не больше количества элементарных циклов исходного графа, т.е. для решения задачи (1) предлагаемым способом требуется не более чем $O(n^3)$-кратное применение алгоритма симплекс-метода к последовательности задач типа (2).

Следовательно, вычислительная сложность предлагаемого способа решения задачи (1) «в худшем случае», т.е. в случае, когда исходный граф полный или почти полный, не превышает $O(n^9)$, то есть полиномиальна.

Литература

1. *Гери М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир,1982.
2. *Пападимитриу Х.Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М: Мир, 1984.
3. *Bland R.G.* New Finite Pivoting Rules, Discussion Paper 7612, CORE, Universite Catholique de Louvain, Heverlee, Belgium, June 1976.