МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО НЕЗАВИСИМОГО МНОЖЕСТВА

Дудов М.Х.
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, г. Черкесск

Дудов М.Х.
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия

Рассмотрим следующую задачу [1, ТГ1]:

Заданы граф $G=(V,E)$, $|V|=n$ и целое положительное число $K \le |V|$. Существует ли на G независимое множество вершин мощностью не менее K или, иначе говоря, существует ли подмножество $V' \subseteq V$, такое, что $|V'| \ge K$ и никакие две вершины из V' не соединены ребром из E?

Пусть $x_i = 1$, если вершина $v_i \in V'$, и $x_i = 0$, если $v_i \notin V'$. Сопоставим каждому ребру графа неравенство вида $x_i + x_j \le 1$, если ребро $(v_i, v_j) \in E$.

Тогда, следуя методологии [2], рассматриваемую задачу можно представить в виде целочисленной задачи линейного программирования (ЦЗЛП):

$$\left.\begin{aligned} & f=\sum_{i=1}^{n} x_i \to \max; \\ & x_i + x_j \le 1 \\ & x_i \in \{0;1\} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Известно, что в общем случае полиномиального по вычислительной сложности алгоритма решения ЦЗЛП не существует.

Представим задачу в виде обычной задачи линейного программирования, исключив условие целочисленности:

$$\left.\begin{aligned} & f=\sum_{i=1}^{n} x_i \to \max; \\ & x_i + x_j \le 1 \\ & 0 \le x_i \le 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Как и во многих других графовых задачах [2-4], представленных в виде ЗЛП, наличие на исходном графе циклов нечётной длины обуславливает, в общем случае, нецелочисленность оптимального решения (2).

Пусть на графе существует цикл $C=(v_1, v_2, ..., v_k)$ длины k, причем k – нечетное. Тогда очевидно, что в максимальное независимое множество V' могут войти не более $\lfloor k/2 \rfloor$ вершин цикла C. Поэтому, с целью исключения нецелочисленных решений, можно для каждого цикла нечетной длины явно указать, что $x_1 + x_2 + ... + x_k \le \lfloor k/2 \rfloor$, дополнив (2) соответствующими ограничениями.

Поскольку любой простой цикл на графе, в том числе и нечетной длины, является линейной комбинацией базисных циклов, то достаточно дополнить (2) ограничениями, соответствующими только базисным циклам графа. При этом нецелочисленные решения перестают быть допустимыми, и задачу можно решать обычным симплекс-методом.

Можно показать, что вычислительная сложность симплекс-метода применительно к задачам вида (3) полиномиальна. Если условия задачи таковы, что алгоритм симплекс-метода не зацикливается, то потребуется не более n раз выполнить шаг алгоритма, т.е. преобразование матрицы размером $(n+m)\times n$, так как на каждом шаге значение целевой функции возрастает ровно на единицу. Если же алгоритм зацикливается, то применение стандартных приемов [2,5] позволяет выйти из цикла и в худшем случае для каждого увеличения целевой функции на единицу потребуется $O(n)$ раз преобразовывать матрицу, следовательно, вычислительная сложность предлагаемого метода не превышает $O(n^8)$, то есть полиномиальна.

Литература

1. *Гери М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир,1982.
2. *Пападимитриу Х.Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М: Мир, 1984.
3. *Hopcroft J.E. and Karp R.M.,* An n5/2 Algorithm for Maximum Matching in Bipartite Graphs, SIAM J. Comput., Vol. 2, 1973.
4. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир,1984.
5. *Bland R.G.* New Finite Pivoting Rules, Discussion Paper 7612, CORE, Universite Catholique de Louvain, Heverlee, Belgium, June 1976.