РАЗРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Статников И.Н., Фирсов Г.И.
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г.Москва

Статников И.Н.
Фирсов Г.И.
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

Широкий класс машин и механизмов хорошо аппроксимируется совокупностью дискретных масс с разветвленными упруго-инерционными связями (рамы машин, системы приводов, виброзащитные устройства и т.д.). Спецификация подобной схемы такова: все массы нумеруются в произвольном порядке от 1 до n; упругие связи между массами нумеруются по формуле

$$M = 10j + q, \tag{1}$$

где j и q - номера масс, причем, придерживаемся условия, что $j < q$, а «земле» присваиваем номер «0». Задачи упрощения математических моделей таких систем на основе декомпозиции или агрегирования [1] (а чаще всего на основе совместного использования декомпозиции или агрегирования системы на подсистемы) рассматривалось в работах [2, 3, 4] и многих других.

Первый предлагаемый подход к декомпозиции таких систем на основе использования статистических оценок состоит в следующем. Пусть в соответствии с общей математической постановкой задана область $G(\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha}$ – вектор жесткостей и масс математической модели

$$M\ddot{y} + K\dot{y} + Cy = F, \tag{2}$$

где M, K и C - соответственно матрицы инерций, демпфирования и жесткостей размером ($n \times n$); F - матрица-столбец внешних воздействий размером ($n \times 1$); n - число степеней свободы; $y = (y_1, ..., y_n)^T$ - вектор-столбец переменных состояния системы (2). Оценивая свойства декомпозируемости математической модели исходной системы, используем количественную оценку слабости связей между парциальными подсистемами по безразмерному коэффициенту упругой связи [3, 4]:

$$\gamma_{jq} = c_{jk} / \sqrt{c_{jj} c_{qq}}\ , \tag{3}$$

где $c_{jj} = \sum_{\substack{q=0 \\ j \neq q}} c'_{jq}$ - жесткость парциальной подсистемы, если q-я масса связана с заданной. Очевидно, что $0 < \gamma_{jq} < 1$. Как показано в [3, 4], если $\gamma_{jq} < \varepsilon$, то в выделенной подсистеме по этому неравенству обеспечивается расчет собственных частот и форм колебаний с точностью до ε и ε^2 соответственно по отношению к аналогичным собственным частотам и формам колебаний в исходной системе. Более точной оценкой влияния взаимодействия между подсистемами на их собственные свойства служит величина связанности между парциальными подсистемами, оцениваемая так [2, 5, 6]:

$$\lambda_{jq} = 2\gamma_{jq} n_j n_q / \left| n_j^2 - n_q^2 \right|, \tag{4}$$

где n_j и n_q - парциальные частоты, определяемые по формулам

$$n_1^2 = \frac{m_1 l_1 g + c}{J_1} \ \text{ и } \ n_2^2 = \frac{m_2 l_2 g + c}{J_2}\ . \tag{5}$$

где J_1 и J_2 - моменты инерции маятников, l_1, l_2 – длины маятников, для крутильных колебаний, или для изгибных по такой формуле:

$$n_j = \sqrt{c_{jj} / m_j}\ . \tag{6}$$

На основании (4) и (6) формулируются следующие статистические критерии декомпозиции. Отыскать в $G(\bar{\alpha})$ такие $G_k(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$, чтобы для $\forall \bar{\alpha} \in G_k(\bar{\alpha})$ выполнялось условие

$$\Phi_k(\bar{\alpha}) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\gamma_{jq} \right)_i + \sigma_k \le \varepsilon_k^* \tag{7}$$

при выполнении неравенств

$$\left(\lambda_{jq} \right)_i \ge \lambda^* , j = \overline{1, N}, \tag{8}$$

где σ_k - среднеквадратическое отклонение по критерию $\Phi_k(\bar{\alpha})$. Если в результате вычислительного эксперимента мы получили m областей $G_k(\bar{\alpha}),\ k = \overline{1, m}$, то процедура

выбора единственной области $G_k(\bar{\alpha})$ приобретает характер выбора компромиссного решения между следующими обстоятельствами. С одной стороны, можно было бы выбрать такую $G_k(\bar{\alpha})$, результаты исследования в которой по (7) соответствуют наименьшему ε_k^*, но при этом может оказаться, что исходная система разбивается и на наименьшее число подсистем. С другой стороны, потеряв в точности (т.е. принимая во внимание более высокое значение ε_k^*), мы можем придти к случаю, когда исходная система разбивается на большое число подсистем, что несомненно выгодно с вычислительной точки зрения: известно, что для получения *k* оценок *f*–мерных векторов состояния нужно меньше машинного времени, чем для построения одной оценки *fk*–мерного вектора [7]. Налицо как проблема выбора оптимального значения ε^{opt} среди всех ε_k^* с позиций точности декомпозиционных расчетов, так и проблема самой оптимальной декомпозиции с позиции упрощения вычислительного аспекта.

На основании формул (4) и (6) можно сразу поставить двухкритериальную задачу: отыскать такую область $G_k(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$, чтобы для $\forall \bar{\alpha} \in G_k(\bar{\alpha})$ выполнялись условия:

$$\Phi_{1k}(\bar{\alpha}) = \min \bar{\gamma}_k \text{ и } \Phi_{2k}(\bar{\alpha}) = \max \bar{\lambda}_k \tag{9}$$

где

$$\bar{\gamma}_k = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\gamma_{jq}\right)_i \text{ и } \bar{\lambda}_k = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_{jq}\right)_i . \tag{10}$$

И в этом случае проблемы выбора одной области из множества $\{G_k(\bar{\alpha})\}$ областей, выделенных с помощью ПЛП-поиска [8] на основе формул (9) и (10), также носит противоречивый характер, т.е. нужен снова компромиссный подход. В качестве далеко не лучшей альтернативы компромиссному подходу можно использовать взвешенную аддитивную свертку из критериев (9) и (10) как дополнительный критерий выбора одной из областей из $\{G_k(\bar{\alpha})\}$, предварительно отнормировав (9) и (10) по формулам

$$F_{1k} = \frac{\Phi_{1k}(\bar{\alpha}) - \Phi_{1k}^{+}}{\Phi_{1k}^{++} - \Phi_{1k}^{+}} \text{ и } F_{2k} = \frac{\Phi_{2k}^{++} - \Phi_{2k}(\bar{\alpha})}{\Phi_{2k}^{++} - \Phi_{2k}^{+}} . \tag{11}$$

где $\Phi_{1k}^{+} = 0$; Φ_{1k}^{++} - очень большое число (больше *n*), например, $\Phi_{1k}^{++} = 100n$; Φ_{2k}^{+} - очень маленькое число, например, $\Phi_{2k}^{+} = 0$; Φ_{2k}^{++} - очень большое число, например $\Phi_{2k}^{++} = 1000n$. Ясно, что при этих условиях $0 \le F_{1k} \le 1$ и $0 \le F_{2k} \le 1$, а аддитивная свертка будет иметь вид

$$\Phi_{3k}(\bar{\alpha}) = p_1 F_{1k}(\bar{\alpha}) + p_2 F_{2k}(\bar{\alpha}) \tag{12}$$

где p_1 и p_2 - веса критериев (11), $p_1 + p_2 = 1$, причем, несомненно, что $p_2 \ge p_1$. Ясно, что подходящий из множества $\{G_k(\bar{\alpha})\}$ областей будет та, в которой для $\forall \bar{\alpha} \in G_k(\bar{\alpha})$ будет выполняться условие

$$\Phi_{3k}(\bar{\alpha}) = \max_{k \in [1,m]} \{\Phi_{3k}\} . \tag{13}$$

Анализ предложенных подходов к решению задачи декомпозиции математических моделей сложных систем типа (2) на ЭВМ показывает, что всякий раз мы сталкиваемся с наличием противоречивой ситуации выбора между точностью декомпозиции и основной задачей упрощения вычислительного процесса. Более общие, более основательные попытки в определенной мере избежать такой ситуации лежат в формализации самого понятия «оптимальная декомпозиция», т.е. в разработке критериев такой оптимальности. По этим вопросам значительные успехи достигнуты в области науки, занимающейся проблемами распознавания и классификации образов (объектов) по множеству признаков. В частности, мы будем опираться на результаты работ [9, 10].

Говоря о декомпозиции разветвленных математических моделей сложных систем вида (2), мы понимаем на интуитивном уровне, что «хорошей» была бы такая декомпозиция, когда бы при сохранении точностных свойств оценок подсистем R_s ($s = \overline{1, S}$) наблюдалась ситуация, при которой $n_s \approx n/S$, где $n_s \in R_s$ - число элементов (в нашем случае – масс), попавших в R_s –подсистему. Это связано как с задачей упрощения вычислительного процесса (если, например, $n = 100$, $S = 2$ и $n_1 = 2$, а $n_2 = 998$, то по-видимому, не произошло никакого упрощения в вычислительном плане).

С этих позиций рассмотрим функцию оптимального разбиения системы на подсистемы, предложенную в [10]:

$$\Phi(\bar{\gamma}, \bar{R}, \varepsilon^*) = \sum_{s=1}^{S} \sum_{j,q \in R_s} \gamma_{jq} - \varepsilon^* \sum_{s=1}^{S} n_s^2 - \varepsilon^* n . \qquad (14)$$

Здесь: $\{\gamma_{jq}\}$ - множество связей (14) между элементами системы; ε^* - порог существования связей в том же смысле, что и в [9, 10]; $\bar{R} = (R_1, ..., R_S)$ - вектор подмножеств (подсистем) элементов исходной системы. С точки зрения функционала (14) оптимальным будет такое разбиение R^{opt}, которое при заданном ε^* максимизирует функционал (34) по всем возможным разбиениям данного множества объектов. Формула (14) показывает, что максимизация достигается за счет компромисса между максимизацией «внутренней суммы исходных связей γ_{jq} и минимизацией суммы квадратов численностей классов n_s. В [10] доказаны теоремы о том, что разбиение системы по (14) компактное, оптимальное. Ясно также, что оптимальность разбиения системы на подсистемы зависит и от значения ε^*. Предлагается и в этом случае подход к определению оптимального значения ε^* для данного разбиения $\varepsilon^*_{opt} = 0,5\xi_{\min}$, где $\xi_{\min} = \sum_{s=1}^{S} \sum_{j,q \in R_s} \gamma_{jq} / \sum_{s=1}^{S} n_s(n_s - 1)$. Не обсуждая далее достоинства и недостатки функционала (14), заметим, что туда можно вместо γ_{jq} подставлять значения λ_{jq}, что не меняет всех выводов, но гораздо сильнее с позиций декомпозиции систем (2). При этом могут появиться дополнительные вычислительные трудности. Используя функционал (14), предлагаем следующий алгоритм декомпозиции системы (2):

1. Задается исходная область $G(\bar{\alpha})$ изменения значений вектора $\bar{\alpha}$ в виде *r*-мерного параллелепипеда $\alpha_{h^*} \le \alpha_h \le \alpha_{h^{**}}, h = \overline{1,r}$, где $[\alpha_{h^*}; \alpha_{h^{**}}]$ - интервал изменения значений *h*-го параметра, причем также настолько «большая», что не может быть и речи об инвариантности собственных свойств системы к вариациям значений параметров α_h.

2. Задаемся числом классов *S* и определяем число элементов каждого класса $n_s \in R_s$ по формуле $n_s = [nq] + 2$, $s = \overline{1,S}$, где *n* - число степеней свободы исходной системы; *q* - псевдослучайные числа Соболя [11], $0 < q < 1$. Сама формула обеспечивает равномерное по вероятности распределение целых чисел n_s и то, что всегда $n_s \ge 2$. Сам вектор количеств элементов в классах $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_S)$ выбирается при выполнении условия $\sum_{s=1}^{S} n_s = n$. Таким образом, формируется разбиение $\bar{R}^1 = (R_1^1, ..., R_S^1)$.

3. Для сформированного разбиения $\bar{R}^1$ в соответствии с (15) и (16) выделяется область $G^1(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$ на основе ПЛП-поиска, в которой для $\forall \bar{\alpha}_i \in G^1(\bar{\alpha})$; $i = \overline{1,N}$ выполняется условие $\left(\varepsilon^*_{opt}\right)_i \left(\varepsilon^*_{opt}\right)_{\min}$, определенного в ходе проведения *N* численных экспериментов.

4. Далее, по алгоритму, изложенному в [10] и при $\varepsilon^* = \left(\varepsilon^*_{opt}\right)_{\min}$, производим перестановки в $\bar{R}$ до тех пор, пока не перестанет увеличиваться функция $\Phi(\bar{\gamma}, \bar{R}, \varepsilon^*)$. На этом процесс заканчивается.

В частном случае, когда узлы приводов сложных машин представляются линейными колебательными рядными системами, математические модели которых имеют вид:

$$J_\mu \ddot{\varphi}_\mu = c_{\mu-1,\mu}(\varphi_{\mu-1} - \varphi_\mu) - c_{\mu,\mu+1}(\varphi_\mu - \varphi_{\mu+1}) + f_\mu(t), \qquad (15)$$

где $\mu = \overline{1,n}$; *n* - число дискретных масс; $c_{\mu,\mu-1}$ - приведенные жесткости упругих звеньев $(c_{01} = c_{n,n+1} = 0)$; J_μ - приведенные моменты инерции маховых масс системы; φ_μ - углы поворота соответствующих маховых масс; $f_\mu(t)$ - внешние возмущения на систему; имеются начальные условия (НУ) общего вида:

$$\varphi_\mu(0) = \varphi_\mu^0; \ \dot{\varphi}_\mu(0) = \dot{\varphi}_\mu^0, \ \mu = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Используя выражение для упругого момента между соседними маховыми моментами $M_{\mu,\mu+1} = c_{\mu,\mu+1}(\varphi_\mu - \varphi_{\mu+1})$, математической модели (15) можно переписать в следующем виде [12]

$$\ddot{M}_{\mu,\mu+1} + \beta^2_{\mu,\mu+1} M_{\mu,\mu+1} - \frac{c_{\mu,\mu+1}}{J_\mu} M_{\mu-1,\mu} - \frac{c_{\mu,\mu-1}}{J_{\mu+1}} M_{\mu+1,\mu+2} = \psi_\mu(t), \tag{17}$$

где $\mu = \overline{1, n-1}$; $M_{01} = M_{n,n+1} \equiv 0$; $\beta^2_{\mu,\mu+1} = \dfrac{c_{\mu,\mu+1}(J_\mu + J_{\mu+1})}{J_\mu J_{\mu+1}}$, а НУ для (17) определяются так:

$$\begin{aligned} M_{\mu,\mu+1}(0) &= c_{\mu,\mu+1}(\varphi^0_\mu - \varphi^0_{\mu+1}) = M^0_{\mu,\mu+1}, \\ \dot{M}_{\mu,\mu+1}(0) &= c_{\mu,\mu+1}(\dot{\varphi}^0_\mu - \dot{\varphi}^0_{\mu+1}) = \dot{M}^0_{\mu,\mu+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Анализ переходных процессов в системе (15) или (17) с использованием ЭВМ при относительно небольших значениях n не вызывает принципиальных затруднений; потребность в декомпозиции такой системы при очень больших n вызвана в первую очередь потребностью решения задач оптимального синтеза, т.е. задач по рациональному выбору параметров.

В целях декомпозиции математической модели (15) на подсистемы дифференциальные уравнения (17) приводят к системе (n - 1) уравнений 2(n - 1) порядка относительно каждой из переменных $M_{\mu,\mu+1}$ ($\mu = \overline{1, n-1}$). Приведенные уравнения имеют вид:

$$L(p) M_{\mu,\mu+1} = \eta_\mu(t),\ \mu = \overline{1, n-1}, \tag{19}$$

где $L(p) = a_{n-1} p^{2(n-1)} + a_{n-2} p^{2(n-2)} + a_{n-3} p^{2(n-3)} + \ldots + a_0$ - есть дифференциальный оператор p ($p = \dfrac{d}{dt}$); $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – постоянные коэффициенты, являющиеся функциями параметров системы (15); $\eta_\mu(t)$ - правые части (нагрузочные функции) для каждого соответствующего звена. НУ для каждого из уравнений (19), кроме $\dot{M}_{\mu,\mu+1}(0) = \dot{M}^0_{\mu,\mu+1}$ определяются по рекуррентным формулам:

$$M^{(j)}_{\mu,\mu+1}(0) = \frac{c_{\mu,\mu+1}}{J_\mu} M^{(j-2)}_{\mu-1,\mu}(0) - \beta^2_{\mu,\mu+1} M^{(j-2)}_{\mu,\mu+1}(0) + \frac{c_{\mu,\mu+1}}{J_\mu} M^{(j-2)}_{\mu+1,\mu+2}(0) + \psi_\mu(0), \tag{20}$$

где $\mu = \overline{1, n-1};\ j = \overline{2, 2n-3}$. Значит, НУ по производным выше первого порядка зависят от НУ (18) и конструктивных параметров системы. Переходя в (14) к безразмерному времени, получим

$$\begin{aligned} &b_{n-1} \frac{d^{2(n-1)}}{d\tau^{2(n-1)}} \left[M_{\mu,\mu+1}(\tau) \right] + b_{n-2} \frac{d^{2(n-2)}}{d\tau^{2(n-2)}} \left[M_{\mu,\mu+1}(\tau) \right] + \ldots + \\ &+ b_2 \frac{d^{(IV)}}{d\tau^{(IV)}} \left[M_{\mu,\mu+1}(\tau) \right] + \frac{d^2}{d\tau^2} \left[M_{\mu,\mu+1}(\tau) \right] + M_{\mu,\mu+1}(\tau) = \frac{1}{a_0} \eta_\mu \left(\sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \tau \right), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$t = \sqrt{\frac{a_1}{a_0}} \tau;\ b_j = (a_j a_0^{j-1}) / a_1^j;\ j = \overline{1, n-1};\ \mu = \overline{1, b-1}. \tag{22}$$

Анализ корней характеристического полинома

$$b_{n-1} \lambda^{n-1} - b_{n-2} \lambda^{n-2} + \ldots + b_2 \lambda^2 + 1 = 0, \tag{23}$$

составленного для уравнения (21) дает картину устойчивости (или неустойчивости) решений дифференциального уравнения: если корни полинома будут действительными отрицательными, то решения (21) будут устойчивыми. Для этого на коэффициенты в уравнении (23) налагаем условия Эйлера:

$$
\begin{aligned}
b_{n-2}^2 &\geq \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n-2}\right)b_{n-1}b_{n-3},\\
b_{n-3}^2 &\geq \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n-3}\right)b_{n-2}b_{n-4},\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
b_2^2 &\geq \left(1+\frac{1}{n-2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)b_3,\\
1^2 &\geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)(1+1)b_1.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Решение системы неравенств (24) в общем виде приводит к результату

$$
b_{j+1} \leq \frac{(n-1)(n-2)...(n-j)}{(j+1)!n^j}, \tag{25}
$$

где $j=\overline{1,n-2}.$

Из формулы (25) следует, что коэффициенты уравнения (23) при старших производных быстро убывают. Например, для 7-и массовой дискретной системы ($j=\overline{1,5}$) получим:

$$
(b_2)_{\max}=\frac{n-1}{2!n}=\frac{6}{2\square 7}=0,42857;(b_3)_{\max}=\frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}=0,10204;(b_4)_{\max}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^3}
$$

$$
=0,01458;\ (b_5)_{\max}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!n^4}=0,000125
$$

и т.д.

При выполнении условий (24) или (25) физический смысл упрощения математической модели (21) состоит в следующем. Малый коэффициент при старшей производной означает, что самая высокая частота исследуемой системы принимает очень большое значение. А это в свою очередь приводит к тому, что часть решения $M_{\mu,\mu+l}(\tau),$, соответствующая этой высокой частоте, принимает пренебрежимо малое значение, и его можно не учитывать.

Формулы (22) и (24) позволили предложить статистические критерии декомпозиции математической модели (15) в соответствии с общей математической постановкой задачи. Для этого введем функции

$$
\Phi_k(\bar{\alpha})=\sum_{j=1}^{n-2}\left(1-\frac{b_{j+1}}{d_{j+1}}\right), \tag{26}
$$

где $k=\overline{1,m=n-1}.$ Так как из (24) следует, что $(b_{j+1})_{\max}=d_{j+1},$ то очевидно, $0<\Phi_k(\bar{\alpha})<n-2,$ т.е. $\Phi_k^+=n-2.$ Очевидно и то, что максимизация функционала (26) соответствует максимизации величины $(d_{j+1}-b_{j+1}).$ Следовательно, в данной задаче декомпозиции условие (9) формулируется так: определить области $G_k(\bar{\alpha})$ такие, чтобы для $\forall\bar{\alpha}_j\in G_k(\bar{\alpha}), i=\overline{1,N}$ выполнялось условие $\mathcal{P}\left[\rho(\Phi(\bar{\alpha}),\Phi_k^+)\leq\varepsilon_k^+\right]\geq\mathcal{P}_з,$ где $0<\varepsilon_k^*<<1,$ $\mathcal{P}_з$ - заданная вероятность, $\rho_k(\Phi_k(\bar{\alpha}),\Phi_k^+)=(n-2-\Phi_k(\bar{\alpha})),$ «$\forall$» - квантор всеобщности, ε_k^* - задаются. Теперь опишем сам алгоритм декомпозиции системы (15) на основании проведенного анализа и введенного критерия декомпозиции.

1. Задается исходная область анализа системы $G(\bar{\alpha})$ и формируется матрица планируемых экспериментов (МПЭ) [8] $A=\|\alpha_{ih}\|,$ где $i=\overline{1,N}, h=\overline{1.r}$;

2. Задается вектор $\bar{D}=(d_1,...,d_{j+1})$, рассчитываемый по правой части (25) и формируется матрица параметров $A=\|a_{kj}\|,$ где $a_{kj}=g_j(\bar{\alpha});k,j=\overline{1,n-1}$, т.е. A – матрица функций;

3. Производится расчет матрицы $B=\|b_{kj}\|$ по формулам (22), используя матрицу A,

$k, j = \overline{1, n-1}$, и рассчитываются $\Phi_k(\bar{\alpha})$ по (21) и затем ρ_k;

4. Производится дисперсионный анализ, на основании которого определяются существенные параметры $\alpha_\pi (\pi < r)$, оказывающие влияние на величину ρ_k (естественно, что стремимся к $\min \rho_k$) и выделяются области $G_k(\bar{\alpha})$, содержащие наилучшие результаты по ρ_k;

5. В выделенных областях в соответствии с пп. 1-3 снова формируются матрицы *B* по небольшому числу экспериментов (*N* = 16-32); для каждой области $G_k(\bar{\alpha})$ рассчитываются величины $\bar{b}_{kj} = N^{-1}\sum_{k=1}^{N} b_{kj}$ и $\sigma_{kj} = (N-1)^{-1/2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(b_{kj} - \bar{b}_{kj})^2}$, на основании которых устанавливаются окончательно порядок модели (21) для каждого момента $M_{\mu,\mu+1}$ по следующему правилу: если $\bar{b}_{k,n-j} + \sigma_{k,n-j} \le \varepsilon_k^*$ при данном *j*, то порядок модели принимается равным 2(*n-j*); это правило основано на том, что из (25) следует: $b_{n-1} < b_{n-2} < ... < b_1$.

Естественно, что предлагаемый алгоритм декомпозиции распространяется и на рядные системы с изгибными колебаниями.

Литература

1. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* Разработка статистических критериев декомпозиции динамических систем. I. Постановка задачи // Современные проблемы информатизации в экономике и обеспечении безопасности. Сб. тр. Вып 14. - Воронеж: Научная книга, 2009. - С.90-96.
2. *Банах Л.Я., Перминов М.Д.* Исследование сложных динамических систем с использованием слабых связей между // Машиноведение. - 1972. - № 4. - С.3-8.
3. *Банах Л.Я.* Упрощение расчетных схем динамических систем // Колебания и динамическая прочность элементов машин. - М.: Наука, 1976. - С.39-46.
4. *Банах Л.Я.* Уменьшение числа степеней свободы при исследовании многомерных систем // Машиноведение. - 1979. - № 1. - С.21-26.
5. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972. - 470 с.
6. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. - М.: Наука, 1964. - 440 с.
7. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. - М.: Наука, 1971. - 424 с.
8. *Статников И.Н., Андреенков Е.В.* ПЛП-поиск - эвристический метод решения задач математического программирования. - М.: МГУДТ, 2006. - 140 с.
9. *Браверман Э.М., Дорофеюк А.А., Лумельский В.Я.. Мучник И.Б.* Диагонализация матрицы связи с выявлением скрытых факторов // Проблемы расширения возможностей автоматов. Вып. 1. - М.: ИПУ, 1971. - С. 42-69.
10. *Куперштоκ В.Л., Миркин Б.Г., Трофимов В.А.* Сумма внутренних связей как показатель качества классификации // Автоматика и телемеханика. - 1976. - Т.37, № 3. - С. 133-141.
11. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. - 288 с.
12. *Дроговоз А.М., Красношапка В.А.* Упрощение многомассовых механических систем путем понижения порядка исследуемого дифференциального уравнения // Прикладные задачи динамики континуально-дискретных упругих систем. - Киев: Наукова думка, 1975. - С.7-15.