АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ДВУХМЕРНОГО МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

[1]Симонов А.Н., [2]Самохин А.Б., [3]Михеев О.В.

[1]ASMR holding BV, г.Бреда

[2]Московский институт радиотехники электроники и автоматики, г.Москва

[3]ЗАО НВК «ВИСТ», г.Москва

olgm@nvkvist.ru

В настоящей работе рассматривается универсальный подход для нахождения асимптотических оценок ОПФ с применением двухмерного метода стационарной фазы. Это подход позволяет получать оценки ОПФ независимо от формы зрачка для широкого класса амплитудных и фазовых функций масок и зрачка. В качестве иллюстрации проводится анализ частотного отклика оптической системы при наличии квадратичной фазовой ошибки. Исследуется возможность по снижению чувствительности ОТФ к квадратичной фазовой ошибки при использовании оптической маски с кубической фазовой функцией. Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

Введение

Во многих случаях описание некогерентных оптических систем удобно проводить в области пространственных частот, т. е. в терминах оптической передаточной функции (ОПФ) [1]. При этом задачи, связанные расчетом и с оптимизацией характеристик оптических систем, естественным образом ведут к задачам расчета и оптимизации ОПФ. Привлечение современных вычислительных средств проектирования и расчета оптических систем позволяет получить точные численные оценки ОПФ в различных ситуациях, однако, выявление общих закономерностей и сути физических процессов остается затруднительным без использования аналитических выражений для ОПФ. Методы получения аналитических оценок для ОПФ, а также для передаточной функции в пространственной области – функции рассеивания точки (ФРТ), широко представлены в литературе, например, [2–6]. Следует заметить, что известные приближенные методы применимы лишь для частных случаев, так как требуют дополнительных ограничений на вид амплитудной и фазовой функций маски и зрачка, на форму зрачка и области пространственных частот.

В настоящей работе рассматривается универсальный подход для нахождения асимптотических оценок ОПФ с применением двухмерного метода стационарной фазы. Это подход позволяет получать оценки ОПФ независимо от формы зрачка для широкого класса амплитудных и фазовых функций масок и зрачка. В качестве иллюстрации проводится анализ частотного отклика оптической системы при наличии квадратичной фазовой ошибки. Исследуется возможность по снижению чувствительности ОТФ к квадратичной фазовой ошибки при использовании оптической маски с кубической фазовой функцией.

Асимптотическая оценка ОПФ

Следуя монографии [1], будем считать для простоты, что рассматриваемые оптические системы являются линейными и пространственно-инвариантными (изопланатическими), а поле световой волны представляет собой скалярную величину.

Рассмотрим оптическую некогерентную систему с фазовой маской в плоскости выходного зрачка. Считаем, что функция фазовой задержки маски $\theta(x, y)$ задана в канонических зрачковых координатах x и y Хопкинса [2]. Полагаем также, что в оптической системе присутствует квадратичное возмущения фазы приходящей волны вида:

$$W(x,y)=w_0\left(a x^2+b xy+c y^2\right), \tag{1}$$

где коэффициент w_0 обозначает амплитуду фазовых возмущений; a, b, c – константы, удовлетворяющие условию $|a|,|b|,|c|\le 1$. В частности, $W(x,y)$ отвечает дефокусировке, когда $a=c=1$ и $b=0$; и $W(x,y)$ соответствует астигматизму, когда $a=1$, $b=0$, $c=-1$ или когда $a=c=0$, $b=1$.

В соответствии с работами [1,2], двухмерная ОПФ некогерентной системы с квадратичной фазовой ошибкой, заданной выражением (1), может быть записана в виде автокорреляции обобщенной зрачковой функции:

$$H(\omega_x,\omega_y,w_0)=\frac{1}{\Omega}\int\int_{-\infty}^{\infty}P\left(x+\frac{\omega_x}{2},y+\frac{\omega_y}{2}\right)P^*\left(x-\frac{\omega_x}{2},y-\frac{\omega_y}{2}\right)dxdy\,, \tag{2}$$

где Ω – площадь зрачка, $P(x,y)$ – обобщенная зрачковая функция, ω_x и ω_y – канонические пространственные частоты [2]. Интегрирование производится по всей плоскости зрачка. В интеграле (2) обобщенная зрачковая функция дается:

$$P(x,y)=p(x,y)\exp[i\theta(x,y)+iw_0(ax^2+bxy+cy^2)], \tag{3}$$

где функция амплитудная функция зрачка

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in\Omega\\ 0, & (x,y)\notin\Omega\end{cases} \tag{4}$$

Подставляя выражение (3) в выражение (2), можно получить:

$$\begin{aligned}H(\omega_x,\omega_y,w_0)=\frac{1}{\Omega}\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,\omega_x,\omega_y)\ \exp[iF(x,y,\omega_x,\omega_y)+\\ +iw_0(2ax\omega_x+bx\omega_y+by\omega_x+2cy\omega_y)]\ dxdy,\end{aligned} \tag{5}$$

где функция

$$f(x,y,\omega_x,\omega_y)=p(x+\omega_x/2,y+\omega_y/2)\,p(x-\omega_x/2,y-\omega_y/2) \tag{6}$$

определяет область перекрытия в интеграле (5) и функция

$$F(x,y,\omega_x,\omega_y)=\theta(x+\omega_x/2,y+\omega_y/2)-\theta(x-\omega_x/2,y-\omega_y/2) \tag{7}$$

представляет собой фазовый вклад.

Для упрощения анализа громоздкого выражения $H(\omega_x,\omega_y,w_0)$, удобно ввести обозначения:

$$\upsilon_x=w_0(a\omega_x+b\omega_y/2)/\pi\ \text{, и}\ \upsilon_y=w_0(c\omega_y+b\omega_x/2)/\pi \tag{8}$$

и переписать ОПФ, заданную выражением (5), в терминах υ_x, υ_y

$$\widetilde{H}(\omega_x,\omega_y,\upsilon_x,\upsilon_y)=\frac{1}{\Omega}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,\omega_x,\omega_y)\exp[iF(x,y,\omega_x,\omega_y)+i2\pi(x\upsilon_x+y\upsilon_y)]\,dxdy\,, \tag{9}$$

которое представляет собой преобразование Фурье функции $f(x,y,\omega_x,\omega_y)\exp[iF(x,y,\omega_x,\omega_y)]$.

Предполагая, что $F(x,y,\omega_x,\omega_y)$ изменяется быстро с изменением переменных x и y, интеграл (9) может быть оценен приближенно с помощью двухмерного метода стационарной фазы [7]. Сохраняя главный член аппроксимации, интеграл (9) может быть представлен как:

$$\begin{gathered}\widetilde{H}(\omega_x,\omega_y,\upsilon_x,\upsilon_y)\cong\frac{2\pi}{\Omega}\,|\,\Delta(x_c,y_c)\,|^{-\frac{1}{2}}\exp[iF(x_c,y_c,\omega_x,\omega_y)+\\ +i2\pi(x_c\upsilon_x+y_c\upsilon_y)+i\pi\delta(x_c,y_c)/4],\end{gathered} \tag{10}$$

где (x_c,y_c) точка экстремума, или эквивалентно, стационарная точка фазовой функции $\Phi=F(x,y,\omega_x,\omega_y)+2\pi(x\upsilon_x+y\upsilon_y)$, *т. е.* (x_c,y_c) определяется из уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_c,y_c)+2\pi\upsilon_x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_c,y_c)+2\pi\upsilon_y=0.\end{cases} \tag{11}$$

Гессиан $\Delta(x_c,y_c)$ в формуле (10), *т. е.* определитель матрицы Гессе

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_c,y_c) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_c,y_c)\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x_c,y_c) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_c,y_c)\end{bmatrix}, \tag{12}$$

вычисляется в точке (x_c,y_c) и дается выражением:

$$\Delta(x_c,y_c)=\det\mathbf{M}=\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\right](x_c,y_c)\,, \tag{13}$$

Функция $\delta(x_c,y_c)$ – сигнатура матрицы $\mathbf{M}$, т. е. разница числа положительных и отрицательных собственных значений матрицы Гессе $\mathbf{M}$ в точке (x_c,y_c). Как видно из выражения (10), гессиан полностью определяет поведение модуля ОПФ $|\,\widetilde{H}(\omega_x,\omega_y,\upsilon_x,\upsilon_y)\,|$, т. е. модуляционной передаточной функции (МПФ) оптической системы. Таким образом, математический анализ $\Delta(x_c,y_c)$ позволит определить вид фазы $\theta(x,y)$ оптической маски для достижения требуемой функции $|\,\widetilde{H}\,|$.

Квадратичная форма, порождаемая симметричной действительной матрицей, может быть сведена невырожденным линейным преобразованием к диагональному виду. В соответствии с законом инерции квадратичных форм Сильвестра [8] разность между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов в диагональном представлении не зависит от выбора преобразования, приводящего матрицу к диагональному виду, и называется сигнатурой матрицы. В частности, квадратичная форма, порождаемая матрицей (12) может быть сведена к диагональному виду $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2$, где λ_1,λ_2 – действительные собственные числа симметричной матрицы $\mathbf{M}$ и $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ – зрачковые координаты в новом ортогональном базисе.

Если фазовая функция $\Phi=F(x,y,\omega_x,\omega_y)+2\pi(x\upsilon_x+y\upsilon_y)$ имеет несколько стационарных точек, тогда дополнительные члены должны быть добавлены, сходные по виду тем, что присутствуют в выражении (10).

Интересно отметить, что преобразование $L:\{(x,y),F\}\to\{(\upsilon_x,\upsilon_y),\tilde{\Phi}\}$, где $F=F(x,y,\omega_x,\omega_y)$, $\tilde{\Phi}=F(x_c,y_c,\omega_x,\omega_y)+2\pi(x_c\,\upsilon_x+y_c\,\upsilon_y)$ и x_c, y_c – выражены посредством переменных υ_x, υ_y в соответствии с формулой (11), есть per se преобразование Лежандра [7,9].

Инвариантность к квадратичной ошибке фазы

Обратимся теперь к важному практическому случаю, связанному с нахождением вида $\theta(x,y)$, приводящему к слабой зависимости ОПФ от величины квадратичной ошибки фазы w_0, см. выражение (1). Ряд частных случаев, а также их применение рассмотрены в работах [10–14].

Из уравнений (10-13) следует, что модуль оптической передаточной функции $|\tilde{H}(\omega_x,\omega_y,\upsilon_x,\upsilon_y)|$ определяется гессианом $\Delta(x_c,y_c)$. Для достижения поставленной задачи мы должны выбрать функцию $\theta(x,y)$ в таком виде, чтобы $\Delta(x_c,y_c)$ не зависел от υ_x, υ_y и, следовательно, от амплитуды w_0 квадратичных фазовых возмущений. Таким образом, $\Delta(x_c,y_c)$ должна удовлетворять

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\upsilon_x}\Delta(x_c,y_c)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial\upsilon_y}\Delta(x_c,y_c)=0.\end{cases}\tag{14}$$

Для упрощения последующего анализа, мы применим уравнения (14) к модифицированному выражению для $\Delta(x_c,y_c)$. В соответствии с выражением (11), координаты стационарной точки (x_c,y_c) даются:

$$\begin{cases}x=x_c(\upsilon_x,\upsilon_y),\\ y=y_c(\upsilon_x,\upsilon_y).\end{cases}\tag{15}$$

Из уравнений (11), следует:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \upsilon_x}(x_c, y_c) + 2\pi = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \upsilon_y}(x_c, y_c) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial \upsilon_x}(x_c, y_c) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial \upsilon_y}(x_c, y_c) + 2\pi = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Производя замену переменных в уравнениях (16) с использованием формул (15), можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_x} + 2\pi = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_y} + 2\pi = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Разрешая систему (17) относительно частных производных второго порядка $\partial^2 F / \partial x^2$, $\partial^2 F / \partial y^2$, $\partial^2 F / (\partial x \partial y)$ в терминах $\partial x / \partial \upsilon_x$, $\partial y / \partial \upsilon_y$, $\partial x / \partial \upsilon_y$ и $\partial y / \partial \upsilon_x$, и подставляя результат в выражение (13), гессиан $\Delta = \Delta(x_c, y_c)$ окончательно упрощается:

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_x}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_y} - \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon_y}\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon_x}}. \tag{18}$$

Можно принять во внимание тот факт, что поведение модуля ОПФ определяется знаменателем $|\Delta|^{-1/2}$ который, в свою очередь, может быть найден из выражения (18):

$$|\Delta|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial x}{\partial \upsilon_x}\frac{\partial y}{\partial \upsilon_y} - \frac{\partial x}{\partial \upsilon_y}\frac{\partial y}{\partial \upsilon_x}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Как следует из выражения (18), условия (14) выполняются, если $x_c(\upsilon_x, \upsilon_y)$ и $y_c(\upsilon_x, \upsilon_y)$ представляют собой линейные комбинации по υ_x и υ_y, другими словами, если

$$\begin{cases} x_c(\upsilon_x,\upsilon_y) = C_1\upsilon_x + C_2\upsilon_y, \\ y_c(\upsilon_x,\upsilon_y) = C_3\upsilon_x + C_4\upsilon_y, \end{cases} \tag{20}$$

где C_n – есть постоянные коэффициенты, $n = \overline{1,4}$. Нахождение нелинейных решений $x_c(\upsilon_x,\upsilon_y)$ и $y_c(\upsilon_x,\upsilon_y)$ систем (11) и (14) выходит за рамки настоящего анализа.

Рассмотрим теперь случай, когда фаза оптической маски выбрана в виде полинома третьей степени:

$$\theta(x,y) = \alpha\,(\beta_1 x^2 y + \beta_2 y^2 x + \gamma_1 x^3 + \gamma_2 y^3)\ , \tag{21}$$

где α – амплитуда фазовой функции маски, большая величина, $\alpha >> 1$; β_1, β_2 и γ_1, γ_2 – постоянные коэффициенты, $|\beta_{1,2}| \le 1$ и $|\gamma_{1,2}| \le 1$. В общем случае, функция $\theta(x,y)$ асимметрична по отношению к переменным x и y. Это обстоятельство является преимущественным, например, для случая оптических систем в присутствии асимметричных аберраций второго порядка. Подставляя выражение (21) в выражение (7), получаем:

$$\begin{aligned} F(x,y,\omega_x,\omega_y) = \alpha(\beta_1 x^2\omega_y + \beta_2 y^2\omega_x + 2\beta_1 xy\omega_x + 2\beta_2 xy\omega_y + 3\gamma_1 x^2\omega_x + 3\gamma_2 y^2\omega_y) + \\ + \alpha(\beta_1\omega_x^2\omega_y + \beta_2\omega_y^2\omega_x + \gamma_1\omega_x^3 + \gamma_2\omega_y^3)/4. \end{aligned} \tag{22}$$

Из уравнений (11) и выражения (22) очевидно, что функция $\theta(x,y)$, определенная формулой (21) обеспечивает поведение, заданное выражениями (20), для стационарной точки с координатами x_c and y_c.

Как видно из системы (11), функция $F(x,y,\omega_x,\omega_y)$ не имеет стационарных точек, если фазовая функция оптической маски задана в виде полинома первого или второго порядков, например, $\theta(x,y) = \alpha\, xy + \beta(x^2 + y^2)$. В случае полиномов порядка выше третьего, стационарные точки даются решением системы двух нелинейных уравнений (11). При этом зависимости $x_c(\upsilon_x,\upsilon_y)$ и $y_c(\upsilon_x,\upsilon_y)$ становятся нелинейными, что ведет к невыполнению условий (20). Таким образом, можно заключить, что ОПФ аппроксимированная выражением (10) не зависит от амплитуды w_0 фазовых искажений второго порядка только тогда, когда $\theta(x,y)$ представляет собой полином третьего порядка в зрачковых координатах x and y.

Для фазовой функции $\theta(x,y)$ маски третьего порядка, заданной выражением (21), уравнения (11) принимают окончательный вид:

$$\begin{cases} (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)x_c + (\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)y_c = -\pi\upsilon_x/\alpha, \\ (\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)x_c + (\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y)y_c = -\pi\upsilon_y/\alpha, \end{cases} \tag{23}$$

и решение системы уравнений дается:

$$x_c = -\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\upsilon_y(\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y) - \upsilon_x(\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y)}{(\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)^2 - (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)(\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y)}, \tag{24}$$

$$y_c = -\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\upsilon_x(\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y) - \upsilon_y(\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)}{(\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)^2 - (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)(\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y)}\,. \qquad (25)$$

Используя выражения (24) and (25), формула (19) упрощается

$$|\,\Delta\,|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\alpha}|\,(\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)^2 - (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)\,(\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y)\,|^{-\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Как видно из решений (24-25), фазовая функция $\Phi = F(x, y, \omega_x, \omega_y) + 2\pi(x\upsilon_x + y\upsilon_y)$ имеет лишь одну стационарную точку. Кроме того, знаменатель в формулах (24-26) не обращаются в ноль для всех пространственных частот $\omega_x^2 + \omega_y^2 \neq 0$, если только

$$27(\gamma_1\gamma_2)^2 - 18\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 - (\beta_1\beta_2)^2 + 4\gamma_1\beta_2^3 + 4\gamma_2\beta_1^3 < 0\,. \qquad (27)$$

Условие (27) гарантирует то, что квадратичная форма (в переменных ω_x, ω_y), представленная знаменателями в формулах (24-26) есть знакоопределенная квадратичная форма, т. е. она всегда положительная или отрицательная в соответствии с критерием Сильвестра [8].

В случае $\alpha \to \infty$, из выражений (24-25) следует, что стационарная точка (x_c, y_c) стремиться к точке начала координат ($x = 0$, $y = 0$) и, таким образом, стационарная точка находится в области зрачка Ω. Используя выражение (22), гессиан матрицы $\mathbf{M}$, определенный формулой (12), в точке (x_c, y_c) становится:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_c, y_c) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_c, y_c) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_c, y_c) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_c, y_c) \end{bmatrix} = 2\alpha \begin{bmatrix} (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x) & (\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y) \\ (\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y) & (\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y) \end{bmatrix}. \qquad (28)$$

Сигнатура $\delta = \delta(x_c, y_c)$ матрицы $\mathbf{M}$ определяется знаками ее собственных значений которые, в свою очередь, могут быть найдены из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda(\beta_1\omega_y + \beta_2\omega_x + 3\gamma_1\omega_x + 3\gamma_2\omega_y) + (\beta_1\omega_y + 3\gamma_1\omega_x)\,(\beta_2\omega_x + 3\gamma_2\omega_y) - \\ - (\beta_1\omega_x + \beta_2\omega_y)^2 = 0. \end{aligned} \qquad (29)$$

Как видно, сигнатура δ становится функцией пространственных частот ω_x, ω_y и параметров β_1, β_2, γ_1, γ_2 фазовой маски третьего порядка.

Окончательно, подставляя выражения (8), (22), (24-26) в формулу (10), аппроксимация двухмерной ОПФ оптической системы, инвариантной к квадратичным возмущениям фазы (при больших величинах α и при $\omega_x^2 + \omega_y^2 \neq 0$) принимает форму:

$$H(\omega_x,\omega_y,w_0)\cong\frac{\pi\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}(\beta_1\omega_x^2\omega_y+\beta_2\omega_y^2\omega_x+\gamma_1\omega_x^3+\gamma_2\omega_y^3)+i\frac{\pi}{4}\delta\right\}}{\Omega\alpha\,|\,(\beta_1\omega_x+\beta_2\omega_y)^2-(\beta_1\omega_y+3\gamma_1\omega_x)(\beta_2\omega_x+3\gamma_2\omega_y)\,|^{\frac{1}{2}}}. \qquad (30)$$

Как следует из выражения (30), ОПФ – хорошо-определенная, гладкая функция, не имеющая сингулярностей во всей области пространственных частот $\omega_x^2+\omega_y^2\neq 0$. Если $\omega_x^2+\omega_y^2=0$, используя определение (5), мы получим $H(0,0,w_0)=1$. Резюмируя определения, сделанные выше, можно записать окончательно для оптической передаточной функции системы с кубической маской

$$H(\omega_x,\omega_y,w_0)\cong\begin{cases}\dfrac{\pi\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}(\beta_1\omega_x^2\omega_y+\beta_2\omega_y^2\omega_x+\gamma_1\omega_x^3+\gamma_2\omega_y^3)+i\frac{\pi}{4}\delta\right\}}{\Omega\alpha\,|\,(\beta_1\omega_x+\beta_2\omega_y)^2-(\beta_1\omega_y+3\gamma_1\omega_x)(\beta_2\omega_x+3\gamma_2\omega_y)\,|^{\frac{1}{2}}},\ \omega_x^2+\omega_y^2\neq 0\\ 1,\quad \omega_x^2+\omega_y^2=0\end{cases}. \qquad (31)$$

Отметим, что в практических целях, модуль $H(\omega_x,\omega_y,w_0)\leq 1$ при $\omega_x\to 0$, $\omega_y\to 0$.

Точность асимптотического представления ОПФ, данного выражением (30), при больших значениях α определяется остаточными членами вида $|\Delta|^{-1/2}\times O(\alpha^{-1})$ or $O(\alpha^{-2})$. Заметим, что лучшую точность можно достичь вычисляя дополнительные члены асимптотического разложения (10) порядка $O(\alpha^{-N})$, где $N\geq 2$ – целое число [7]. В качестве альтернативы, вклад от экспоненциально убывающих членов может быть учтен для улучшения точности нахождения $H(\omega_x,\omega_y,w_0)$, см. работу [15]. Этот подход позволяет достичь приемлемую точность оценки ОПФ даже при умеренных величинах параметра α.

Используя общую формулу (31), которая аппроксимирует ОПФ оптической системы с кубической фазовой маской, мы рассмотрим ряд частных случаев: (i) фазовая маска содержит только смешанные члены по переменным x и y, т. е. $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$; (ii) фазовая маска содержит только кубические члены, т. е. $\beta_1=\beta_2=0$, $\gamma_1=\gamma_2=1$.

В первом случае, выражение (21) принимает простой вид $\theta(x,y)=\alpha(\beta_1x^2y+\beta_2y^2x)$ и фазовая функция содержит только смешанные члены по x и y. В соответствии с выражением (27) знаменатели в формулах (24-26) не обращаются в ноль при всех величинах параметров β_1, β_2 и при $\omega_x^2+\omega_y^2\neq 0$. Можно заключить из выражения (29), что собственные значения λ_1, λ_2 матрицы Гессе $\mathbf{M}$ имеют различные знаки при всех значениях β_1, β_2. Таким образом, видно, что $\delta(x_c,y_c)=0$. По аналогии с выражением (31), оптическая передаточная функция принимает вид:

$$H(\omega_x,\omega_y,w_0)\cong\begin{cases}\dfrac{\pi\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}[\beta_1\omega_x^2\omega_y+\beta_2\omega_y^2\omega_x]\right\}}{\Omega\alpha\,|\,\beta_1^2\omega_x^2+\beta_2^2\omega_y^2+\beta_1\beta_2\omega_x\omega_y\,|^{\frac{1}{2}}},\quad \omega_x^2+\omega_y^2\neq 0\\ 1,\quad \omega_x^2+\omega_y^2=0\end{cases}. \qquad (32)$$

Во втором случае, фазовая функция есть $\theta(x,y)=\alpha(x^3+y^3)$ которая отвечает виду кубической фазовой маски, первоначально предложенной в работе Довского и Кейси [10]. Из выражения (29) находим: $\lambda_1=3\omega_x$, $\lambda_2=3\omega_y$, а сигнатура матрицы $\mathbf{M}$ становится $\delta=\mathrm{sgn}(\omega_x)+\mathrm{sgn}(\omega_y)$. Таким образом, выражение (30) при $\alpha\to\infty$ and $\omega_x\neq 0$, $\omega_y\neq 0$ становится:

$$H(\omega_x,\omega_y,w_0)\cong\frac{\pi\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}(\omega_x^3+\omega_y^3)+i\frac{\pi}{4}[\mathrm{sgn}(\omega_x)+\mathrm{sgn}(\omega_y)]\right\}}{3\Omega\alpha\,|\,\omega_x\omega_y\,|^{\frac{1}{2}}}\ , \qquad (33)$$

которое, для частного случая квадратного зрачка с площадью $\Omega=4$ (в канонических координатах), совпадает аппроксимацией найденной в работе [10] для ОПФ с кубической фазовой маской в присутствии большой ошибки фокусировки. При $\omega_x=0$, приближенное выражение для ОПФ будет:

$$H(0,\omega_y,w_0)\cong\sqrt{\frac{\pi}{3\Omega\alpha|\omega_y|}}\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}\omega_y^3+i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\omega_y)\right\}, \qquad (34)$$

и, аналогичным образом, при $\omega_y=0$ приближенное выражение для ОПФ принимает форму:

$$H(\omega_x,0,w_0)\cong\sqrt{\frac{\pi}{3\Omega\alpha|\omega_x|}}\exp\left\{i\frac{\alpha}{4}\omega_x^3+i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\omega_x)\right\}. \qquad (35)$$

Выражение (33) для ОПФ следует дополнительно нормализовать в точке $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, положив $H(0,0,w_0)=1$. Более детальное рассмотрение вопроса апертурного кодирования фазы с произвольной кубической маской дано в работе [10].

Литература

1. G*oodman J.W.* Introduction to Fourier Optics, 3rd ed. (Roberts&Company Publishers, 2005).
2. *Hopkins H.H.* "The frequency response of a defocused optical system," Proc. Roy. Soc. of London A231, 91-103 (1955).
3. *Stokseth P.A.* "Properties of a defocused optical system," J. Opt. Soc. Am. 59, 1314-1321 (1969).
4. *Born M.* and *Wolf E.* Principles of Optics, 7th ed. (Cambridge Univ. Press, 2003).
5. *Mahajan V.N.* Optical Imaging and Aberrations (SPIE Press, 2001), Vol. 2.
6. *Simonov A.N. and Rombach M.C.* "Asymptotic behavior of the spatial frequency response of an optical system with defocus and spherical aberration," J. Opt. Soc. Am. A 27, 2563-2573 (2010).
7. *Федорюк М.В.* Метод Перевала (Наука, 1977).
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория Матриц, 4th ed. (Наука, 1988).

9. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и Ряды (Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987).
10. *Dowski E.R.* and *Cathey W.T.* "Extended depth of field through wave-front coding," Appl. Opt. 34, 1859-1866 (1995).
11. *Johnson G.E., Dowski E.R., Cathey W.T.* "Passive ranging through wave-front coding: information and application," Appl. Opt. 39, 1700-1710 (2000).
12. *Cathey W.T,. Dowski E.R.* "New paradigm for imaging systems," Appl. Opt. 41, 6080-6092 (2002).
13. *Prasad S., Torgersen T.C., Pauca V.P., Plemmons R.J., J. van der Gracht* "High-resolution imaging using integrated optical systems," Intern. J. Imag. Sys. Techol. 14, 67-74 (2004).
14. *Bagheri S, Silveria P.E.X., Farias D.P.* "Analytical optimal solution of the extension of the depth of filed using cubic-phase wavefront coding. Part I. Reduced-complexity approximate representation of the modulation transfer function," J. Opt. Soc. Am. A 25, 1051-1063 (2008).
15. *Kaminski D.* "Exponentially improved stationary phase approximations for double integrals," Meths. Appl. Analysis 1, 44-56 (1994).