СТРУКТУРИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ЭНТРОПИЙНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Статников И.Н., Фирсов Г.И.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г.Москва

firsovgi@mtu-net.ru

Рассмотрена попытка предварительного оценивания энтропийных свойств системы «пространство варьируемых параметров – поверхность отклика» на основе методики ПЛП-поиска с целью найти ярко выделяющиеся подобласти максимума или минимума энтропии. На тестовых примерах показано, что характер изменения энтропийных оценок в зависимости от значений параметров был в определенной мере аналогичен характеру изменения самих выборочных средних значений функций

С теоретической точки зрения эффективность применения того или иного метода оптимизации, понимаемой широко, существенно зависит от степени адекватности используемой математической модели реальным динамическим процессам, происходящих в создаваемом или усовершенствуемом устройстве. Разумеется, в узком смысле, при использовании одной и той же математической модели всегда имеет место конкуренция различных методов оптимизации (по точности, по скорости сходимости результатов расчетов, по ясности интерпретации этих результатов). Но в этом случае сама эффективность применения того или иного метода оптимизации становится заложницей объема и качества априорной информации, имеющейся к моменту начала решения прикладной задачи оптимизации. Поэтому кажется очевидным, что наиболее привлекательными становятся такие методы оптимизации, которые, при условии наличия адекватной математической модели, требуют минимума априорной информации о решаемой задаче, более того, позволяют по ходу решения получать такую информацию легко и просто. Такие методы, естественно, называть универсальными. К ним будем относить метод Монте-Карло и его различные модификации [1, 2]. В основе использования метода Монте-Карло и его модификаций лежат принципы случайного поиска решения задачи, что и делает такой подход универсальным. Но платой за такую универсальность является определенная “слепота”, и это приводит к громадным объемам вычислений даже для современных вычислительных машин, тем более, что имеет место рост размерности решаемых задач оптимизации (растет число фазовых координат M и число конструктивных (оптимизируемых) параметров, растет число критериев качества, характеризующих систему (объект)). А громадные объемы получаемой информации при проведении вычислительных экспериментов естественно затрудняют ее интерпретацию. Возникла потребность сочетания универсальности метода Монте-Карло с элементами более интеллектуального анализа результатов численных экспериментов, чем простая констатация статистических оценок, то есть усовершенствования технологии проведения математических экспериментов.

Как представляется, в значительной степени эту потребность реализует метод планируемого ЛП-поиска (ПЛП-поиска) [3], благодаря одновременного использования в нем идеи дискретного квазиравномерного по вероятности зондирования J-мерного пространства варьируемых параметров αj ($j=1,\ldots,J$) и методологии планируемого математического эксперимента. Сочетание таких идей в алгоритме ПЛП-поиска позволило, с одной стороны, осуществить глобальный квазиравномерный просмотр заданной области варьируемых параметров, а, с другой стороны, применить многие формальные оценки из математической статистики.

Рассмотрим алгоритм ПЛП-поиска и формализованную постановку решаемой задачи при его использовании. Отметим, что успешность применения ПЛП-поиска обуславливается тем, что этот метод предназначен, в основном, для применения на предварительном этапе решения задачи, когда полученная информация позволяет принять решение об использовании других методов оптимизации (но значительно эффективнее), или об окончании решения (такое тоже возможно). В основание метода положена рандомизация расположения в области $G(\vec{\alpha})$ векторов $\vec{\alpha}$, рассчитываемых по ЛПτ-сеткам [4], и которая оказывается возможной благодаря тому, что весь вычислительный эксперимент проводится сериями. В ПЛП-поиске на сегодняшний день можно варьировать одновременно значения до 51-го параметров (J = 51).Для рандомизации (случайного смешения уровней варьируемых параметров α_{ijh}) дискретного обзора $G(\vec{\alpha})$ могут быть использованы многие существующие таблицы равномерно распределенных по вероятности целых чисел. В целях экономии памяти ЭВМ в ПЛП-поиске алгоритм рандомизации построен на использовании датчика псевдослучайных чисел q (0 < q <1) из [4]. Рандомизация состоит в том, что для каждой h - ой серии экспериментов (h=1,…, H(i, j)), где H(i, j) - объем выборки из элементов Φ_{ijh} для каждого критерия, вычисляется свой вектор случайный номеров строк $\vec{j} = (j_{1h}, j_{2h}, ..., j_{\beta h})$ в таблице направляющих числителей (ТНЧ) по формуле:

$$j_{\beta h} = [\mathrm{R} \times \mathrm{q}] + 1, \tag{1}$$

а значения α_{ij} в h - ой серии рассчитываются с помощью линейного преобразования

$$\alpha_{ijh} = \alpha_{j^*} + q_{ihj_{\beta h}} \times \Delta\alpha_j, \tag{2}$$

где $\Delta\alpha_j = \alpha_{j^{**}} - \alpha_{j^*}$, $\alpha_{j^{**}}, \alpha_{j^*}$ - соответственно верхние и нижние границы области $G(\vec{\alpha})$; β = 1, …, J; R - любое целое число (в ПЛП-поиске R = 51); j - фиксированный номер варьируемого параметра; i = =1,…, M (j) - номер уровня j - го параметра в h - й серии; M(j) - число уровней, на которое разбивается j - ый параметр; в общем случае $j_{\beta h} \neq j$ (в чем и состоит одна из целей рандомизации). Было доказано с помощью критерия Романовского [5], что числа $j_{\beta h}$, вырабатываемые по формуле (1), оказываются совокупностью равномерно распределенных по вероятности целых чисел. Обратим внимание, что M(j) и есть количество экспериментов, реализуемых в одной серии. И если $M(j) = M$ = const и $H(i, j) = H$ = const, то в этом случае параметры *N0*, M и H связаны простым соотношением:

$$N0 = M \times H, \tag{2}$$

где *N0* - общее число вычислительных экспериментов., при этом длина выборки из Φ_{ijh} в точности равна H. Но в общем случае, когда $M(j)$ = var, то и $H(i, j)$ = var, и тогда формула (2) для одного критерия примет такой вид:

$$N0 = \sum_{i=1}^{M(j)} H(i, j). \tag{3}$$

Обработка результатов основывается на сопоставлении выборочных средних $\bar{\Phi}_{ijk}$ с общим средним значением критерия $\bar{\Phi}_{0k}$ по критерию Фишера [5], где $i = \overline{1, M_j}$, M_j – число уровней варьируемого параметра. Существенными из итогов результатов обработки экспериментов на математической модели в [3, 6, 7] являются как выделение областей концентрации G_{0k} наилучших решений по k – му критерию, так и выделение подобласти концентрации компромиссных решений при выбранной (или заданной) схеме компромисса.

Однако в этой методике, как и для любой другой, связанной с вероятностной интерпретацией получаемых результатов, всегда присутствует «осадок» сомнений: а с наиболее ли вероятностным распределением мы имеем дело? (что, конечно, связано с достаточностью объема проведенных вычислительных экспериментов). Поэтому в данной работе излагается попытка предварительного оценивания энтропийных свойств [8] системы «пространство варьируемых параметров – поверхность отклика $\Phi(\alpha)$» на основе методики [3, 6, 7] с надеждой найти, по аналогии с вышеизложенным, ярко выделяющиеся подобласти максимума или минимума энтропии *S*. Привлекает интерпретация принципа максимума энтропии [9]: « …не представляется возможным выбрать распределение, уменьшающее предполагаемую неопределенность…».

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов (для сечений с 1 по 8)

Номер i-го сечения	$\Phi_1(\alpha)$				$\Phi_2(\alpha)$			
	α_1	S_i	α_2	S_i	α_1	S_i	α_2	S_i
1	-1.875	1.7610	-0.375	1.4316	-1.875	1.3664	-0.375	1.1246
		1.9730		1.5048		1.5013		1.3055
		1.5968		1.2899		1.3055		1.0297
2	-1.625	1.7207	-0.125	1.2175	-1.625	1.3687	-0.125	0.9859
		1.9730		1.5968		1.6138		1.3055
		1.3274		0.6730		0.8711		0.5004
3	-1.375	1.7585	0.125	1.5989	-1.375	1.4466	0.125	1.3820
		1.9298		1.8605		1.5657		1.5013
		1.5571		1.7219		1.3331		1.3055
4	-1.125	1.6329	0.375	1.5989	-1.125	1.3359	0.375	1.1882
		1.7751		1.7820		1.4703		1.3762
		1.5827		1.0961		1.2052		0.6881
5	-0.875	1.5148	0.625	1.6428	-0.875	1.2135	0.625	1.3919
		1.5827		1.7524		1.4320		1.5013
		1.2899		1.3748		1.0961		1.2241
6	-0.625	1.3505	0.875	1.8581	-0.625	1.0924	0.875	1.4683
		1.4306		2.0389		1.2023		1.7219
		1.2899		1.5430		1.0297		1.1611
7	-0.375	1.3737	1.125	1.7066	-0.375	0.8530	1.125	1.3279
		1.3762		1.9730		0.8557		1.5126
		1.3662		1.3535		0.8451		0.8557
8	-0.125	1.2892	1.375	1.5549	-0.125	0.8604	1.375	1.1301
		1.3535		1.7751		0.9489		1.2780
		1.0961		1.3662		0.6881		0.8451

С этой целью был проведен вычислительный эксперимент на двух функциях типа Розенброка [10]: $\Phi_1(\alpha) = 100(\alpha_2 - \alpha_1^2)^2 + (1-\alpha_1)^2$ и $\Phi_2(\alpha) = 70(\alpha_2 - \alpha_1^2)^2 + (0,2-\alpha_1)^2$. В соответствии с [3, 7] для двух функций в пространстве исследуемых параметров размерности $J = 2$ была построена матрица планируемых экспериментов размерности $N_0 \times J$, где $N_0 = 64$ – число строк этой матрицы (или число вычислительных экспериментов; небольшое). При этом $M_j = 16$ для каждого из двух варьировавшихся параметров. Исходная область варьирования была задана такой: $\alpha_1 \in (-2;2), \alpha_2 \in (-0,5;3,5)$. Сама величина энтропии *S* подсчитывалась по известной формуле $S = -P_m \ln P_m$, где P_m – вероятность попадания значения $\Phi(\alpha)$ **в** m – й интервал изменения значений критерия; при этом $m = 1,…,n$, а само n – число интервалов, на которое разбивается диапазон $\Phi_{\max} - \Phi_{\min}$. В данной работе бралось *n = 10*, что определяет *maxS =ln(n) ≈ 2.3026*, соответствующий равномерному распределению вероятностей критерия (как наиболее вероятному).

Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл.1 и 2. .В таблицах для каждого *i*-го сечения для двух функций приведено по три выборочных значения энтропии: 1-ая строчка – средние выборочные значения энтропии $\overline{S}_{ij}$; 2 – я строчка – максимальные выборочные значения энтропии $S_{ij}^{\max}$; 3 – я строчка – минимальные выборочные значения энтропии $S_{ij}^{\min}$. Для каждой функции по всей области варьирования параметров были получены общие средние значения энтропии $S_{01} = 1,5849$ и $S_{02} = 1,2506$ соответственно. Из данных таблицы следует такой анализ. Для функции $\Phi_1(\alpha)$ по α_1 существует два интервала (-1.875;-0.375) и (0.375;1.875), где $\overline{S}_{ij}$ > $S_{01} = 1,5849$, и второй из двух интервалов содержит координату экстремума функции $(\alpha_1 = 1)$; по α_2 можно приблизительно выделить интервал (-0.125;2.125), где $\overline{S}_{ij}$ > $S_{01} = 1,5849$, также содержащий координату экстремума $(\alpha_2 = 1)$. Для функции $\Phi_2(\alpha)$ наблюдается иная ситуация: по α_1 существует два интервала (-1.875;-0.375) и (0.625;1.875), где $\overline{S}_{ij}$ $> S_{02} = 1,2506$, оба интервала не содержат координату экстремума функции $(\alpha_1 = 0,21)$; по α_2 нельзя точно выделить какой-либо один интервал; поэтому при дальнейших поисках оставляем исходный.

Таблица 2. Результаты вычислительных экспериментов (для сечений с 9 по 15)

Номер *i*-го сечения	$\Phi_1(\alpha)$				$\Phi_2(\alpha)$			
	α_1	S_i	α_2	S_i	α_1	S_i	α_2	S_i
9	0.125	1.1834	1.625	1.8234	0.125	0.8368	1.625	1.5523
		1.3535		2.0162		0.9489		1.8047
		0.6730		1.4306		0.5004		1.2023
10	0.375	1.3378	1.875	1.6820	0.375	0.9960	1.875	1.3353
		1.3762		1.9730		1.2241		1.6138
		1.2241		1.3535		0.8557		0.9489
11	0.625	1.5568	2.125	1.5180	0.625	1.2069	2.125	1.1992
		1.8605		1.7820		1.5013		1.5657
		1.4306		1.3535		1.0671		0.9489
12	0.875	1.6739	2.375	1.5358	0.875	1.3423	2.375	1.1484
		1.9172		1.9730		1.5126		1.7219
		1.4306		1.3535		1.2023		0.8557
13	1.125	1.7628	2.625	1.3583	1.125	1.5840	2.625	0.8829
		2.0389		1.3762		1.7219		0.9489
		1.5126		1.3274		1.4446		0.9489
14	1.375	1.7349	2.875	1.4066	1.375	1.4690	2.875	1.1285
		2.0162		1.5126		1.8047		1.4446
		1.4286		1.3055		1.2773		0.8557
15	1.625	1.8411	3.125	1.6213	1.625	1.5143	3.125	1.3742
		1.9730		1.9434		1.6908		1.6923
		1.7219		1.3762		1 3535		0.8557
16	1.875	1.8659	3.375	1.6240	1.875	1.5236	3.375	1.3903
		1.9730		1.9172		1.7219		1.6908
		1.7651		1.4306		1.3351		1.2023

Следует отметить, что характер изменения энтропийных оценок в зависимости от значений параметров был в определенной мере аналогичен характеру изменения самих выборочных средних значений функций. Дальнейший случайный поиск значений экстремумов в указанных областях привел к таким результатам: $\Phi_1(\alpha)$ = *0.0267* за *756* испытаний (экспериментов) и $\Phi_2(\alpha)$ = *0.03* за 1163 эксперимента.

Литература

1. *Бусленко Н.П., Голенко Д.И, Соболь И.М. и др. //* Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). - М.: Физматгиз,1962. - 322 с.
2. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* // Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. - М.: Дрофа, 2006. - 175 с.
3. *Статников И.Н. //* О структурировании пространства исследуемых параметров в задачах проектирования машин и механизмов. Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2000. - № 5. - С.11 - 17.
4. *Соболь И.М. //* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. - М.: Наука, Главн. ред. физ-мат. лит., 1969. - 288 с.
5. *Митропольский А.К. //* Техника статистических вычислений. - М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. - 576 с.
6. *Статников И.Н., Андреенков Е.В.* // ПЛП-поиск - эвристический метод решения задач математического программирования. - М.: МГУДТ, 2006. - 140 с.
7. *Статников И.Н., Фирсов Г.И. //* ПЛП-поиск и его реализация в среде MATLAB. Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. Труды Второй Всероссийской научной конференции (Москва, 25-26 мая 2004г.). - М.: ИПУ РАН, 2004. - С.398-411.
8. *Климонтович Ю.Л. //* Статистическая теория открытых систем. - М.: ТОО "Янус", 1995. - 624 с.
9. *Вильсон Ф.Дж.* // Энтропийные методы моделирования сложных систем. - М.: Наука, Физматлит, 1978. - 248 с.
10. *Химмельблау Д.//* Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 534 с.