

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ВАЛА С МАХОВИКОМ

Хакимов А.Г.

Институт механики Уфимского научного центра РАН, г.Уфа

hakimov@anrb.ru

По трем собственным частотам крутильных колебаний определяются место и размеры поперечного надреза вала с маховиком.

В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот изгибных колебаний [1] или изменение частоты собственных продольных колебаний [2]. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных бегущих волнах в стержнях конечной длины посвящена работа [4].

Рассматривается напряженно-деформированное вала, закрепленной верхним концом на упругой опоре с жесткостью на кручение c_1 и маховиком на другом конце с моментом инерции J_1 (рис. 1). Предполагается, что на валу имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Рассматривается только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для вала. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что надрез может быть в любом месте по длине вала. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

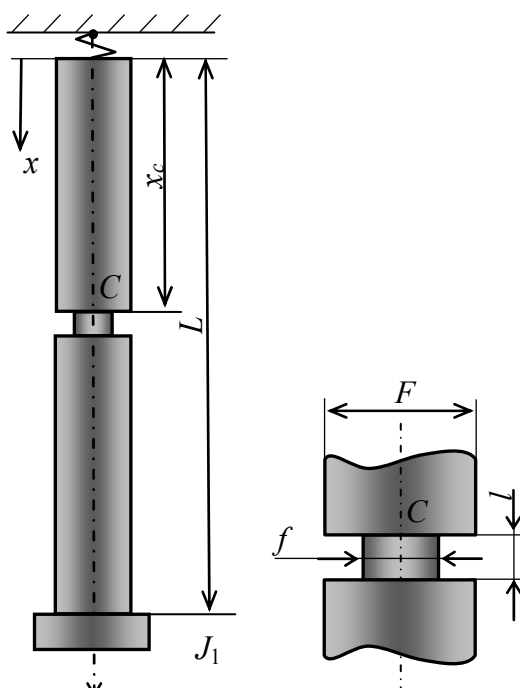


Рис.1.

Обозначим через L , J_p длину и полярный момент инерции поперечного сечения вала, G , ρ – модуль сдвига, плотность, через l , j_p – длину и полярный момент инерции поперечного сечения надреза, x_c – его координату, φ , M – угол поворота и крутящий момент в сечении вала. Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость

$$M = GJ_p \theta, \quad \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$M = c_1 \varphi \quad (x = 0), \quad M = -J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x = L).$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [5]. Рассматриваем динамическую задачу [2]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$M = c_1 \varphi \quad (x = 0), \quad M = -J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x = L), \quad (2)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства моментов и углов поворота)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (x = x_c + l), \quad m = \frac{J_p}{J_p}. \quad (4)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c , длина надреза l и параметр m . В прямой задаче координата надреза x_c , его длина l и параметр m известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (1) имеет вид

$$\varphi = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a, a^2 = G/\rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ определяются из шести граничных условий (2)-(4). Для того, чтобы A_i , B_i ($i=1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (5)$$

где его ненулевые элементы записываются в виде

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -q, a_{12} = 1, a_{25} = \sin(\alpha L) + p \cos(\alpha L), a_{26} = -\cos(\alpha L) + p \sin(\alpha L), \\
a_{31} &= \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -m \sin(\alpha x_c), a_{34} = m \cos(\alpha x_c), \\
a_{41} &= \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c), \\
a_{53} &= m \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -m \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}), \\
a_{63} &= \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}),
\end{aligned}$$

где

$$p = \frac{J_1 \omega^2}{GJ_p \alpha}, \quad q = \frac{c_1}{GJ_p \alpha}.$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Если коэффициент $c_1 = 0$, то частотное уравнение упрощается. Дополнительно, применяя следующие соотношения для малых αl :

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l \cos(\alpha x_c), \quad \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l \sin(\alpha x_c)$$

и пренебрегая $(\alpha l)^2$, получим

$$\begin{aligned}
& m^2 (\cos(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) + \sin(\alpha L) \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c)) + \\
& + m^2 p (p \cos(\alpha L) \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) - \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c)) + \\
& + m \left[\frac{p \cos(\alpha L) + \sin(\alpha L)}{\alpha l} - \cos(\alpha L) + p \sin(\alpha L) \right] - \\
& - p (\sin(\alpha L) \sin^2(\alpha x_c) + \cos(\alpha L) \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c)) + \\
& + \cos(\alpha L) \sin^2(\alpha x_c) - \sin(\alpha L) \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для вала без надреза ($\alpha l = 0$) и без маховика из уравнения (6) следует, что $\sin \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [2] $\alpha L = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$) или $\omega_k = k\pi a/L$.

Для определения m , l и x_c необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с надрезом.

Прямая задача. Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $a = 3141.9$ м/с. $L = 3$ м, $J_p = 9.817 \cdot 10^{-6}$ м⁴ (диаметр вала 100 мм), $J_1 = 16$ кгм², $c_1 = 0$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты вала без надреза и без маховика $\omega_1 = 3290.2332$ с⁻¹, $\omega_2 = 6580.4664$ с⁻¹, $\omega_3 = 9870.6997$ с⁻¹. Для вала без надреза и с маховиком $\omega_1 = 1654.6343$ с⁻¹, $\omega_2 = 4938.5387$ с⁻¹, $\omega_3 = 8227.4971$ с⁻¹. Для вала с надрезом при $x_c = 1$ м, $m=0.2$, $l = 0.02$ м и с маховиком решение прямой задачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний вала $\omega_1 = 1650.087957$ с⁻¹, $\omega_2 = 4810.479030$ с⁻¹, $\omega_3 = 8206.529986$ с⁻¹. На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $m=0.1$ и различных l (в м). Эти зависимости имеют периодический характер. На рис. 3 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от параметра m для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных l (в м). На рис. 4 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных значений параметра m .

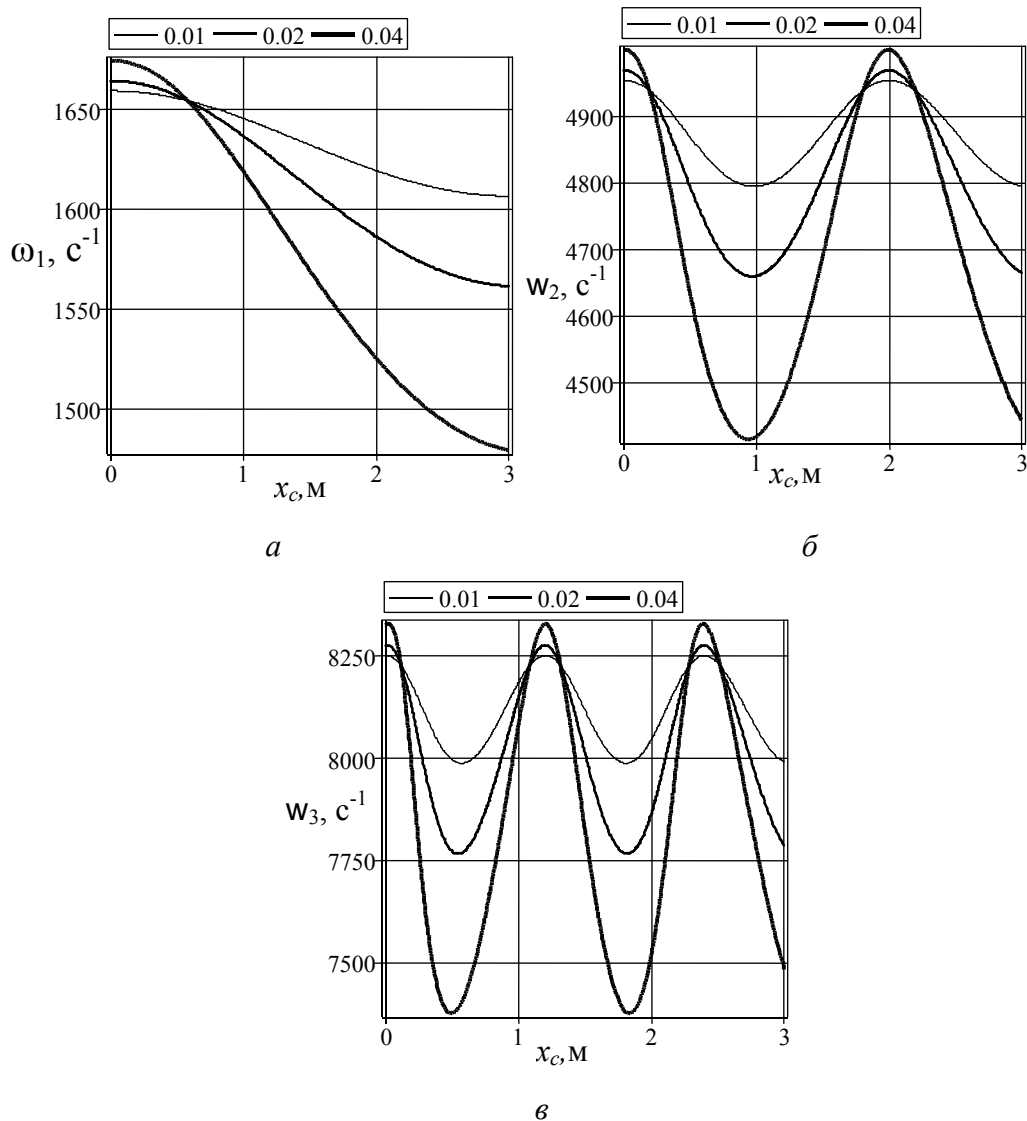


Рис. 2. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $m=0.1$ и различных l (в м).

Обратная задача. Если частотное уравнение (6) записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза x_c , его длина l и параметр m . Например, для круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1 = 1648 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 4810 \text{ c}^{-1}$, $\omega_3 = 8206 \text{ c}^{-1}$ решение обратной задачи дает, что вал имеет надрез при $x_c = 1.015$ м, $m=0.148$, $l = 0.014$ м. На рис. 5 приводятся зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра m от круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , для $\omega_2 = 4770 \text{ c}^{-1}$ (1), $\omega_2 = 4790 \text{ c}^{-1}$ (2), $\omega_2 = 4810 \text{ c}^{-1}$ (3), $\omega_3 = 8206.53 \text{ c}^{-1}$.

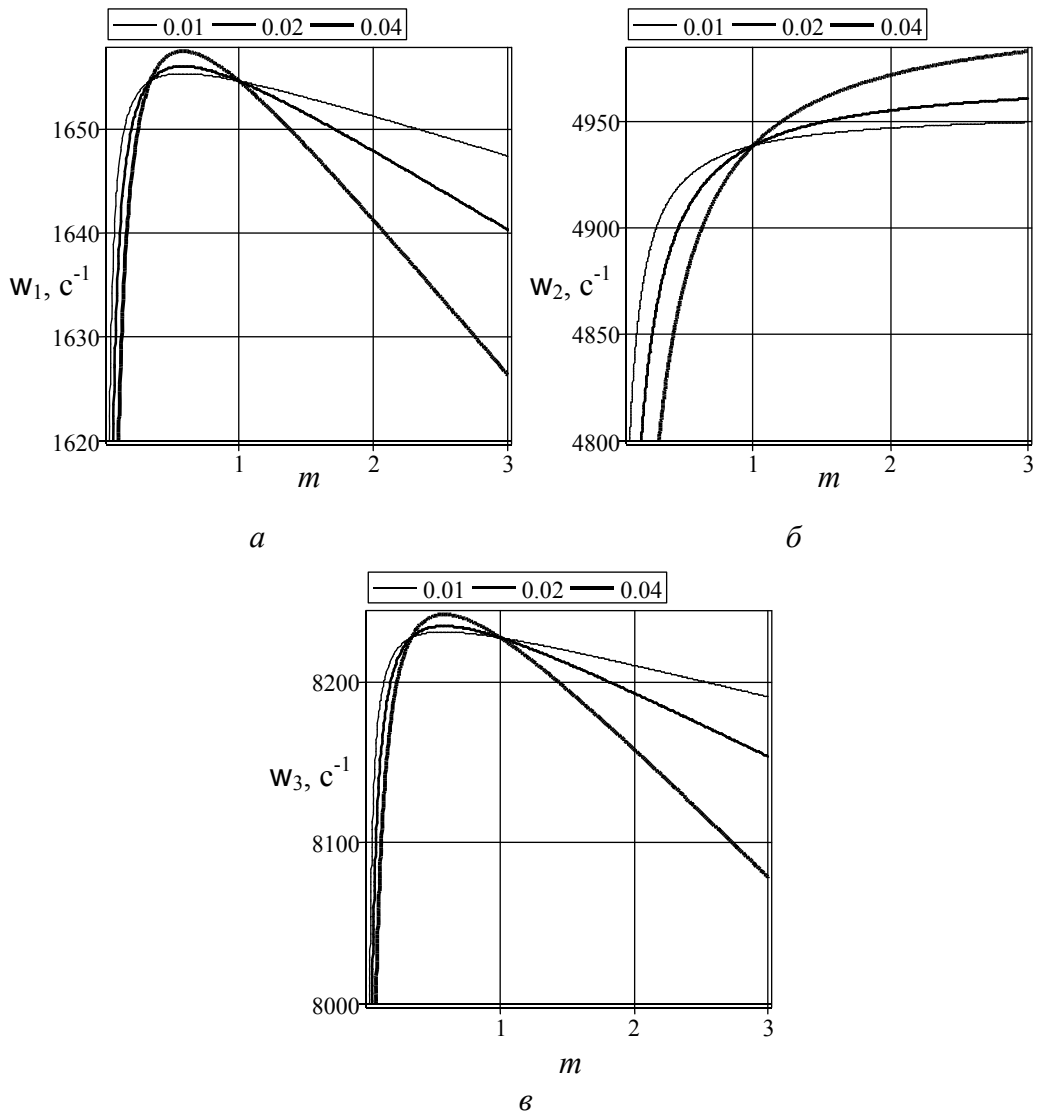
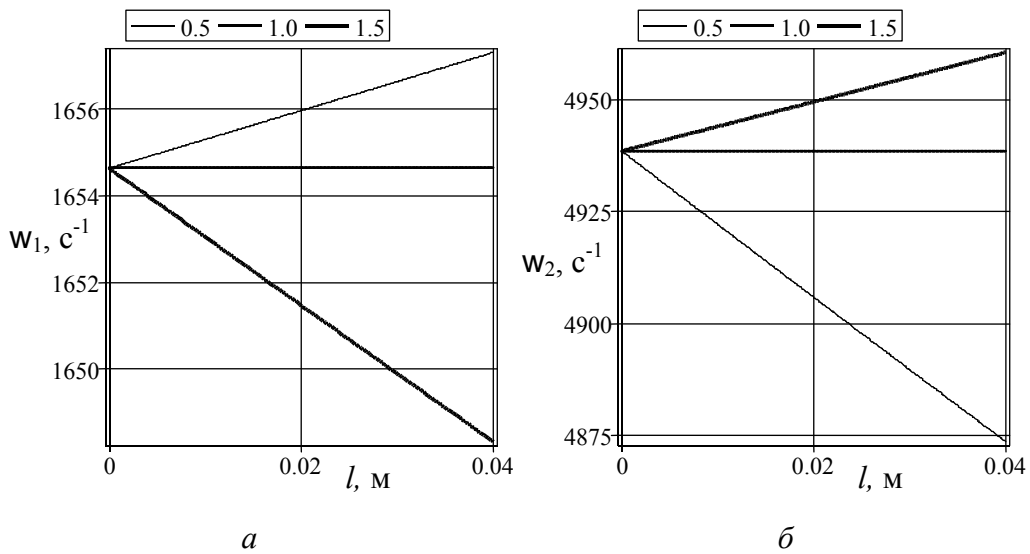
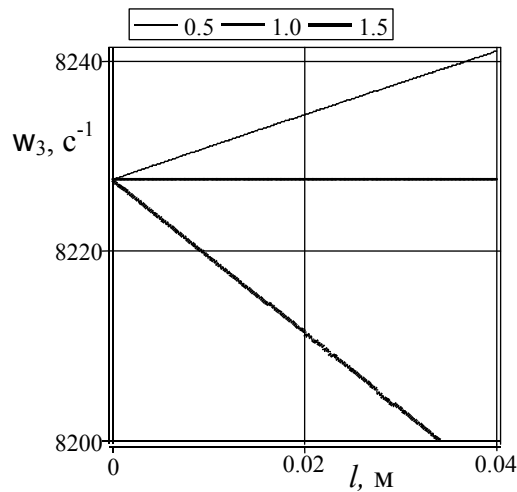


Рис. 3. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от параметра m для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных l (в м).





в

Рис. 4. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных значений параметра m .

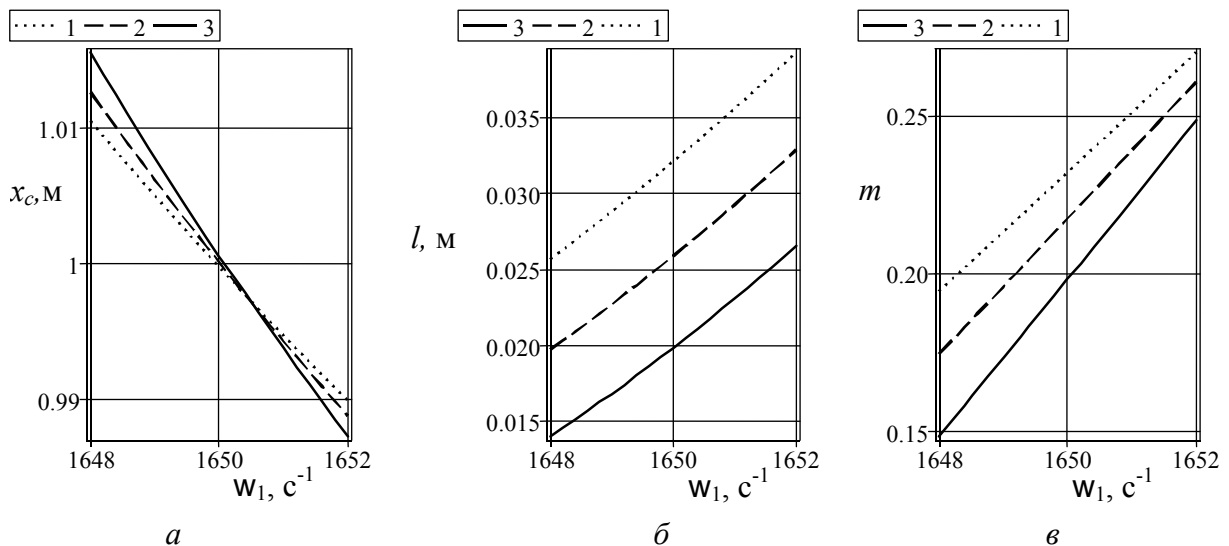


Рис. 5. Зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра m от круговой частоты крутильных колебаний вала ω_1 .

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных крутильных колебаний можно определить координату надреза x_c , его длину l и параметр надреза m .

Литература

1. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. // Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org> 2005, 5.
2. Ильгамов М.А. // Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем». 2007. С.201-211.
3. Ватульян А. О. // Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 224 с.

4. *Ватульян А. О., Солуянов Н. О.* // Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне. //Дефектоскопия. 2005. №9. С.44-56.
5. *Партон В.З., Морозов Е.М.* // Механика упругопластического разрушения // М.: Наука, 1974. – 450 с.