ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ВСЕХ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК

[1]Спиридонов Ф.Ф., [2] Смирнов В.В.

[1]Тверской филиал МГЭИ, г. Тверь

[2]БТИ АлтГТУ, г. Бийск

vvatvs.rambler.ru

Получены зависимости количества всех пифагоровых троек чисел от величины наибольшего и наименьшего числа в комплекте таких троек. Они хорошо аппроксимируются линейной функцией.

Информационные технологии поддержки математических вычислений продолжают играть ключевую роль в научных исследованиях. Мощь современных вычислительных средств помогает анализировать особенности решения как новых, так и широко известных задач, одна из которых [1] рассматривается в настоящей работе.

Известно, что последняя теорема Ферма формулируется следующим образом. Не существует натуральных чисел x, y и z удовлетворяющих при d > 2 соотношению

$$x^d + y^d = z^d . \qquad (1)$$

Анализ этого соотношения затруднён тем, что в нём присутствуют три неизвестных натуральных числа, а также целочисленный параметр d, который по известным соображениям может принимать значения 2, 3, 5, 7, 11, ...

В случае d=2 из (1) следует формулировка теоремы Пифагора:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Набор трёх натуральных чисел, удовлетворяющих этой теореме, обычно называют пифагоровой тройкой чисел или просто пифагоровой тройкой. По так называемым формулам индусов основные (базовые) пифагоровы тройки чисел $\{x, y, z\}$ определяются двухпараметрическими зависимостями:

$$x = k \cdot l,\ \ y = (1/2)(k^2 - l^2),\ \ z = (1/2)(k^2 + l^2), \qquad (2)$$

где k, l - натуральные взаимно простые нечётные числа ($k > l$), k = 3, 5, 7... , l = 1, 3, 5, ...

Откажемся от взаимной простоты параметров k и l, тогда формулы (2) описывают множество всех наборов пифагоровых троек. В каждом таком наборе (подмножестве) троек чисел значение параметра k фиксировано, а величина параметра l пробегает значения от 1 до k-2. Таким образом, зависимость максимального значения числа z в наборе троек от параметра k выражается уравнением

$$z_{\max}= (1/2)[k^2 + (k - 2)^2].$$

Для минимального значения соответственно будем иметь

$$z_{\min}= (1/2)(k^2 + 1).$$

После несложных преобразований получим уравнения

$$k^2 - 2k + 2 = z_{\max}, \qquad (3)$$

$$k^2 + 1 = 2\ z_{\min}. \qquad (4)$$

Зависимости (3), (4) и обратные к ним $k(z_{\max})$ и $k(z_{\min})$ являются квадратичными и однозначными.

Интересно было бы получить зависимости общего числа троек N от значений $z_{\max}$ и $z_{\min}$. Этим вопросом никто до сих пор не занимался.

Прежде всего, получим зависимость приращения числа троек N от значения целочисленного параметра $k > 2$. Непосредственные вычисления приводят к следующему результату. Для значений k = 3, 5, 7, ... искомые величины $N_{\max}$ = 1, 2, 3, ... , а $N_{\min}$ = 0, 1, 2, ... Таким образом, имеем простую арифметическую прогрессию. Отсюда зависимости $\Delta N(k)$ выражаются следующим образом:

$$\Delta N_{\max}(k)=(1/2)(k-1),$$

$$\Delta N_{\min}(k)=(1/2)(k-1)-1$$

Теперь нетрудно получить зависимости для членов последовательности $N(k)$. Они выражаются по известной формуле для суммы арифметической прогрессии следующим образом:

$$N_{max}(k)=(1/8)(k^2-1), \qquad (5)$$

$$N_{min}(k)=(1/8)[(k-1)^2-2(k-1)]+1. \qquad (6)$$

Заметим, что из (5) и (6) следует ограничение: *каждый* член последовательностей $N(k)$ должен делиться без остатка на 8.

Решая уравнения (3) и (4) относительно k при условии $z_{max|min} > k > 2$ нетрудно получить

$$k(z_{max}) = (z_{max} - 1)^{1/2} + 1, \qquad (7)$$

$$k(z_{min}) = (2z_{min} - 1)^{1/2}, \qquad (8)$$

Произведя эквивалентные преобразования и подставляя (6) и (7) в (5) и (6) соответственно, получим

$$N_{max}(z_{max})=(1/8)[(z_{max} -1)+2(z_{max} -1)^{1/2}], \qquad (9)$$

$$N_{min}(z_{min})=(1/8)[2(z_{min} +1) - 4(2z_{min} -1)^{1/2}+8]. \qquad (10)$$

Из последних соотношений нетрудно видеть следующее. Во-первых, значения z *обязательно* являются нечётными числами, при этом всякое (z_{max} -1) делится нацело на число 8, а всякое (z_{min} +1) делится нацело на число 4. Это соотносится с полученным ранее результатом для последовательностей $N(k)$. Во-вторых, всякое (z_{max} -1) *обязательно* должно делиться на число 16, а всякое ($2z_{min}$ -1) также *обязательно* должно делиться на число 4. Совокупность этих ограничений является более жёсткой. Кроме того, всякие числа (z_{max} -1) или ($2z_{min}$ -1) *обязательно* должны быть квадратами некоторых чисел иначе из них нельзя будет извлечь квадратный корень.

Подводя итог, отметим, что последовательности нечётных чисел z_{max} и z_{min} довольно разрежены вследствие последних ограничений. С возрастанием значения параметра k числа z встречаются всё реже и реже. Это соответствует предложенной модели. Кроме того, структура выражений (9), (10) более сложна, чем (7), (8). Начало последовательностей (z_{max} - 1), z_{max}, ($2z_{min}$ -1), z_{min} приведено в следующей таблице.

Начало последовательностей

(z_{max} -1)	**z_{max}**	**($2z_{min}$ -1)**	**z_{min}**
16	17	9	5
64	65	25	13
144	145	49	25
…	…	…	…

Отсюда можем получить формулы:

$$z_{max\ i}=(4i)^2+1,$$

$$z_{min\ i}=[(2i+1)^2+1]/2,$$

где i=1, 2, 3, … - номер тройки.

Любое число z во всех предыдущих комплектах троек (k = 3, 5, 7, ..., k^* - 1), включая рассматриваемый комплект ($k = k^*$), являясь максимальным числом в пифагоровой тройке, не превосходит числа z_{max} или z_{min}. На рис.1 изображены точечные графики $N(z_{max})$, $N(z_{min})$ и их аппроксимации линейными зависимостями. Полученный результат позволяет оценить как количество всех пифагоровых троек при заданном z, так и получить различные целочисленные функции распределения таких троек чисел.

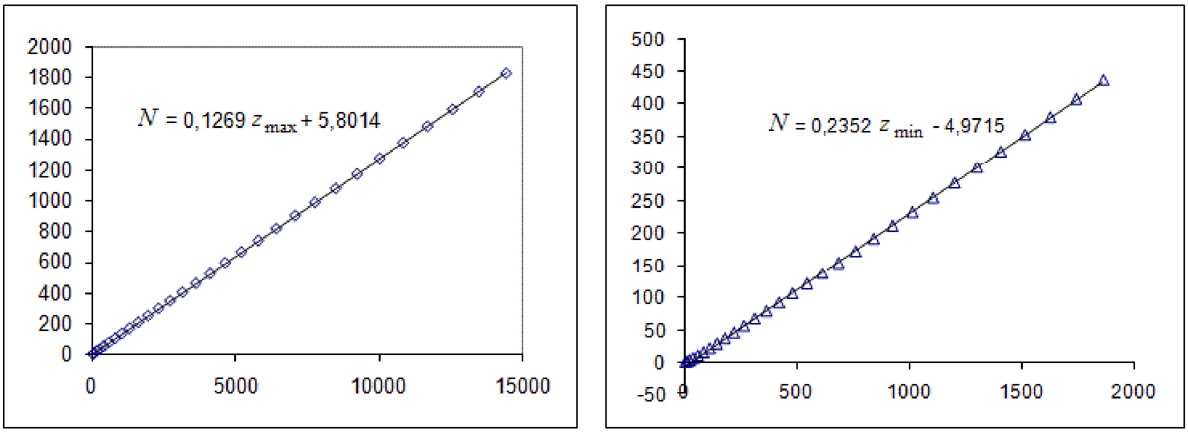

Рис.1. Точечные графики N(z_{max}), N(z_{min}) и их аппроксимации линейными зависимостями

Ранее [2] для случая d=1 была получена аналогичная зависимость $N(z)$, где z наибольшее число в произвольной тройке. Эта зависимость для нечётных значений z имеет вид

$$N(z)=(1/4)(z-1)^2.$$

На рис.2 она сопоставляется с полученными в данной работе точными зависимостями $N(z_{\max})$ и $N(z_{\min})$ для случая d=2.

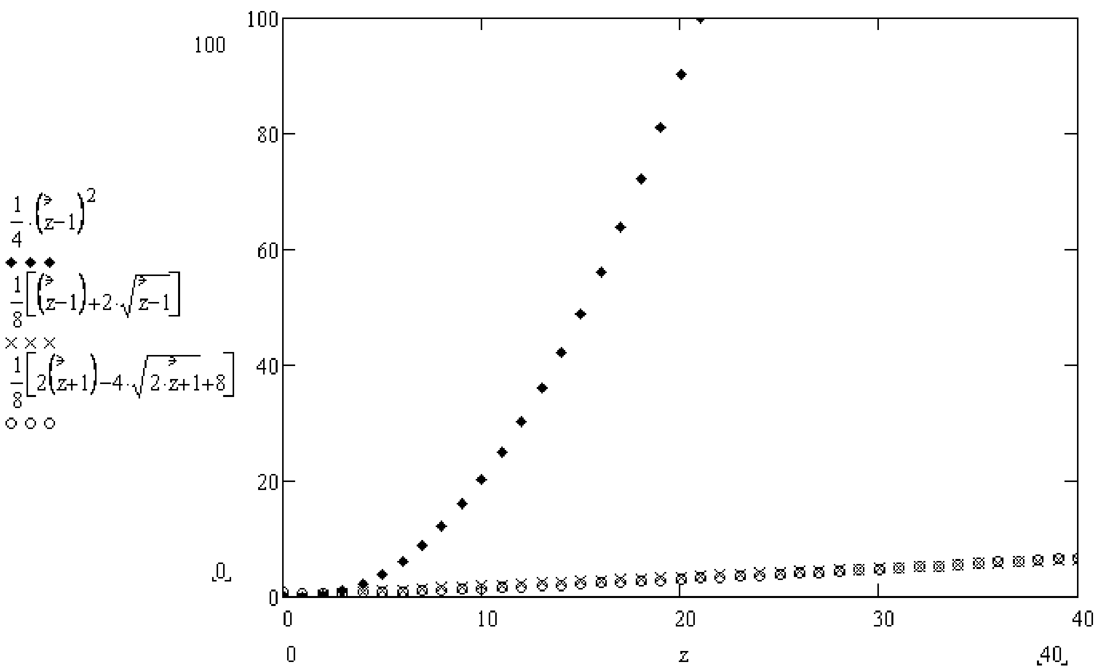

Рис. 2. Сравнение зависимости N(z) для случая d=1 (♦) с точными зависимостями N(zmax) (×) и N(zmin) (•) для случая d=2

Сравнение показывает, что отношение количества троек чисел при $d = 1$ к количеству пифагоровых троек чисел при $d = 2$ пропорционально числу $2(z_{\max} - 1)$ и $(z_{\max} - 3)$. Например, при величине числа $z = 101$ это отношение составляет 200 и 98 соответственно.

Визуальное сравнение этих зависимостей показывает, что возрастание количества *пифагоровых* троек чисел при $d = 2$ существенно ниже, чем возрастание количества троек чисел при $d = 1$.

На основе полученных результатов предположим, что структура зависимости количества троек от величины z сохраняется при возрастании величины параметра d. Тогда в линейном приближении коэффициент должен измениться в меньшую сторону и его величина может быть оценена как 1/16 (1/4 → 1/8 → 1/16). Показатель степени также должен уменьшиться до значения 0 (2 → 1 → 0). Следовательно, для $d = 3$ получим

$$N(z) = 1/16\ (z - 1)^0 = 1/16.$$

Но $1/16 < 1$, а значения целочисленной функции $N(z)$ должны быть больше или равны единице. Поэтому получается, что для случая $d = 3$ вовсе нет троек чисел, которые удовлетворяли бы соотношению Ферма. Таким образом, подтверждается справедливость теоремы Ферма для случая $d = 3$.

Литература

1. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика, алгебра, анализ. – М.: Наука, 1987.
2. *Спиридонов Ф.Ф., Смирнов В.В.* Один из аспектов Большой теоремы Ферма // Инновационные технологии: производство, экономика, образование: Материалы Всероссийской научно-практической конференции 24 сентября 2009 года. – Бийск: Изд-во АлтГТУ, 2009. – С. 98-99 – С. 127-129.